Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Módulo Básico de Ingeniería

Álgebra II[1] - Una solución de la Pep N°2
Profesor Ricardo Santander Baeza
06 de Diciembre del 2012

[1] Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 3z & & & = & a+1 \\ 2x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ -ax & + & y & & & = & -a \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene solución única}\}$$

Para solucionar este problema aplicaremos el teorema del rango. Así que

En primer lugar, determinamos la matriz ampliada asociada al sistema $(*)$, e.e

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 3z & & & = & a+1 \\ 2x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ -ax & + & y & & & = & -a \end{array}\right| \approx (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 3 & | & a+1 \\ 2 & 1 & 4 & | & 0 \\ -a & 1 & 0 & | & -a \end{pmatrix}$$

En segundo lugar, procedemos a escalonar la matriz $(A|B)$, usando operaciones elementales:

$$\begin{aligned} (A|B) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 3 & | & a+1 \\ 2 & 1 & 4 & | & 0 \\ -a & 1 & 0 & | & -a \end{pmatrix} \begin{array}{c} (l_2 \to l_2 - l_1) \\ (l_3 \to l_3 - 2l_1) \\ (l_4 \to l_4 + al_1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & | & a \\ 0 & -1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 1+a & a & | & 0 \end{pmatrix} (l_2 \leftrightarrow -l_2) \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -a \\ 0 & -1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 1+a & a & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (l_1 \to l_1 - l_2) \\ (l_3 \to l_3 + l_2) \\ (l_4 \to l_4 - (1+a)l_2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 1+a \\ 0 & 1 & -2 & | & -a \\ 0 & 0 & 0 & | & -a-2 \\ 0 & 0 & 3a+2 & | & a^2+a \end{pmatrix} (l_3 \leftrightarrow l_4) \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 1+a \\ 0 & 1 & -2 & | & -a \\ 0 & 0 & 3a+2 & | & a^2+a \\ 0 & 0 & 0 & | & -a-2 \end{pmatrix} \qquad (**) \end{aligned}$$

Ahora, observamos que en $(**)$ tenemos que analizar la forma de continuar con la solución del problema, pues tenemos dos casos claramente marcados:

Caso 1: Si $a \neq -2$ entonces $\rho(A) \neq \rho(A|B)$ y el sistema no tiene solución.

Caso 2: Si $a = -2$ entonces

$$(A|B) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & -1 \\ 0 & 1 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & -4 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} (l_3 \to -\tfrac{1}{4}l_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & -1 \\ 0 & 1 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (l_1 \to l_1 - 3l_3) \\ (l_1 \to l_2 + 2l_3) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\mathbb{S} = \{-2\}$

[2] Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_0 + a_1 - 2a_2 + a_3 = 0 \wedge a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0\}$ entonces

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

[a] Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_3[x]$, e.e. $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$

En efecto

$$\begin{aligned}
p(x) \in \mathbb{W} & \iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \wedge a_0 + a_1 - 2a_2 + a_3 = 0 \wedge a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\
& \iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \wedge \left.\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 - 2a_2 + a_3 & = & 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 & = & 0 \end{array}\right| \\
& \iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \wedge \left.\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 - 2a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_0 + 0a_1 - a_2 + 0a_3 & = & 0 \end{array}\right| \\
& \iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \wedge \left.\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 - 2a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_0 & = & a_2 \end{array}\right| \\
& \iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \wedge \left.\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 - 4a_0 + a_3 & = & 0 \\ 2a_0 & = & a_2 \end{array}\right| \\
& \iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \wedge \left.\begin{array}{rcl} a_1 - 3a_0 + a_3 & = & 0 \\ 2a_0 & = & a_2 \end{array}\right| \\
& \iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \wedge \left.\begin{array}{rcl} a_0 & = & \frac{a_1+a_3}{3} \\ 2a_0 & = & a_2 \end{array}\right| \\
& \iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \wedge a_0 = \frac{a_1 + a_3}{3} \wedge a_2 = \frac{2a_1 + 2a_3}{3} \\
& \iff p(x) = \frac{a_1 + a_3}{3} + a_1x + \frac{2a_1 + 2a_3}{3}x^2 + a_3x^3; a_\in\mathbb{R} \wedge a_3 \in \mathbb{R} \\
& \iff p(x) = \frac{a_1}{3} + \frac{a_3}{3} + a_1x + \frac{2a_1}{3}x^2 + \frac{2a_3}{3}x^2 + a_3x^3; a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_3 \in \mathbb{R} \\
& \iff p(x) = a_1\left(\frac{1}{3} + x + \frac{2}{3}x^2\right) + a_3\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^2 + x^3\right); a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Así que,

$$\mathbb{W} = \left\langle\left\{\frac{1}{3} + x + \frac{2}{3}x^2, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^2 + x^3\right\}\right\rangle \leq \mathbb{R}_3[x]$$

[b] Determine $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W})$

Del punto anterior, sabemos que $\alpha = \left\{\frac{1}{3} + x + \frac{2}{3}x^2, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^2 + x^3\right\}$ es un sistema de generadores, para $\mathbb{W}$ además es un conjunto linealmente independiente, pues

$$\begin{aligned}
a\left(\frac{1}{3} + x + \frac{2}{3}x^2\right) + b\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^2 + x^3\right) & = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \Longrightarrow \\
\frac{a + b}{3} + ax + \frac{2a + 2b}{3}x^2 + bx^3 & = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \Longrightarrow \\
\left.\begin{array}{rcl} \frac{a+b}{3} & = & 0 \\ a & = & 0 \\ \frac{2a+2b}{3} & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array}\right| & \Rightarrow a = b = 0
\end{aligned}$$

Así que α es una base de $\mathbb{W}$ y por tanto $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}) = 2$

[3] Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) = 3$ y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si para $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos el conjunto $\beta = \{v_1, v_1 + 2v_2, v_1 + v_2 - \lambda v_3\}$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \beta \text{ es una base de } \mathbb{V}\}$$

Solución

Para determina el conjunto $\mathbb{S}$ debemos conocer sus elementos o al menos la forma de estos, en consecuencia

$$\lambda \in \mathbb{S} \iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ \beta \text{ es una base de } \mathbb{V}$$

Queda claro entonces que la pertenencia de λ al conjunto $\mathbb{S}$, depende de que β sea una base y como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) = 3$ entonces para que β sea una base, basta que sea un sistema de generadores o un conjunto linealmente independiente. Testearemos esta última condición y en consecuencia

$$av_1 + b(v_1 + 2v_2) + c(v_1 + v_2 - \lambda v_3) = 0_{\mathbb{V}} \quad \Longrightarrow \quad (a+b+c)v_1 + (2b+c)v_2 - \lambda c v_3 = 0_{\mathbb{V}} \stackrel{\alpha \text{ es Li}}{\Longrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{lrcl} (1) & a+b+c & = & 0 \\ (2) & 2b+c & = & 0 \\ (3) & -\lambda c & = & 0 \end{array}\right|$$

De la ecuación (3) sigue que $\lambda \neq 0 \Longrightarrow c = 0$ y de (2) sigue que $b = 0$ y de (1) sigue que $a = 0$, y entonces β es linealmente independiente y conforme a lo dicho es una base por tanto

$$\mathbb{S} \;=\; \mathbb{R} - \{0\}$$

[4] Respecto del producto interno usual de $\mathbb{R}^4$. Determine una base ortogonal para el subespacio $\mathbb{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$.

Solución: Iniciamos el proceso determinando una base para el subespacio $\mathbb{U}$.

$$\begin{array}{rcl} u \in \mathbb{U} & \Longleftrightarrow & u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\wedge\; x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\wedge\; x_3 = x_1 + 2x_2 \\ & \Longleftrightarrow & u = (x_1, x_2, x_1 + 2x_2, x_4); x_1 \in \mathbb{R}; x_1 \in \mathbb{R}; x_2 \in \mathbb{R}; x_4 \in \mathbb{R} \\ & \Longleftrightarrow & u = (x_1, 0, x_1, 0) + (0, x_2, 2x_2, 0) + (0, 0, 0, x_4); x_1 \in \mathbb{R}; x_1 \in \mathbb{R}; x_2 \in \mathbb{R}; x_4 \in \mathbb{R} \\ & \Longleftrightarrow & u = x_1(1,0,1,0) + x_2(0,1,2,0) + x_4(0,0,0,1); x_1 \in \mathbb{R}; x_2 \in \mathbb{R}; x_4 \in \mathbb{R} \\ & \Longleftrightarrow & u \in \{x_1(1,0,1,0) + x_2(0,1,2,0) + x_4(0,0,0,1) \mid x_1 \in \mathbb{R}; x_2 \in \mathbb{R}; x_4 \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{U} & = & \{x_1(1,0,1,0) + x_2(0,1,2,0) + x_4(0,0,0,1) \mid x_1 \in \mathbb{R}; x_2 \in \mathbb{R}; x_4 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \langle\{(1,0,1,0), (0,1,2,0), (0,0,0,1)\}\rangle \end{array}$$

Además, $\alpha = \{(1,0,1,0), (0,1,2,0), (0,0,0,1)\}$ es linealmente independiente pues

$$a(1,0,1,0) + b(0,1,2,0) + c(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow (a, b, a+2b, c) = (0,0,0,0) \Rightarrow a = b = c = 0$$

Ahora procedemos a ortogonalizar usando Gram - Schmidt

$$\begin{array}{rcl} \text{Si } v_1' & = & (1,0,1,0) \text{ entonces} \\ v_2' & = & (0,1,2,0) - \dfrac{\langle (0,1,2,0), (1,0,1,0)\rangle}{\langle (1,0,1,0), (1,0,1,0)\rangle}\,(1,0,1,0) \\ & = & (0,1,2,0) - \dfrac{2}{2}\,(1,0,1,0) \\ & = & (0,1,2,0) - (1,0,1,0) \\ & = & (-1,1,1,0) \\ v_3' & = & (0,0,0,1) \text{ Ya es ortogonal a ambos vectores} \end{array}$$

Así que tenemos la base ortogonal,

$$\alpha' \;=\; \{(1,0,1,0), (-1,1,1,0), (0,0,0,1)\}$$