Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Módulo Básico de Ingeniería

Álgebra II[1] - Una Solución de la Pep N° 1
Profesor Ricardo Santander Baeza
25 de Octubre del 2012

[1] Si $A = \begin{pmatrix} (x+2) & x & x & x \\ x & (x+2) & x & x \\ x & x & (x+2) & x \\ x & x & x & (x+2) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

Solución: Iniciamos nuestro análisis estudiando los elementos del conjunto $\mathbb{S}$.

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{S} &\iff x \in \mathbb{R} \wedge A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \\ &\iff x \in \mathbb{R} \wedge \det(A) = 0 \end{aligned}$$

Luego, la determinación de $x \in \mathbb{S}$ depende del anulamiento del determinante de A, y entonces hay que calcular ese determinante. Por tanto,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} (x+2) & x & x & x \\ x & (x+2) & x & x \\ x & x & (x+2) & x \\ x & x & x & (x+2) \end{pmatrix} \begin{matrix} (l_1 \to l_1 - l_4) \\ (l_2 \to l_2 - l_4) \\ (l_3 \to l_3 - l_4) \end{matrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ x & x & x & (x+2) \end{pmatrix} = 2^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ x & x & x & (x+2) \end{pmatrix} \quad (l_4 \to l_4 - xl_1) \\ &= 8 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & x & x & (2x+2) \end{pmatrix} = 8 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ x & x & (2x+2) \end{pmatrix} \quad (l_3 \to l_3 - xl_1) \\ &= 8 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & x & (3x+2) \end{pmatrix} = 8 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ x & (3x+2) \end{pmatrix} = 8(4x+2) \\ &= 32x + 16 \end{aligned}$$

Así que,

$$x \in \mathbb{S} \iff x \in \mathbb{R} \wedge 32x + 16 = 0 \iff x \in \mathbb{R} \wedge x = -\frac{1}{2}$$

Finalmente, $\mathbb{S} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

[2] Sea $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4 \times 1)$ tal que $h \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+b+d \\ a-b-c \\ b-d \end{pmatrix}$ entonces demuestre que h es un isomorfismo de grupos.

En efecto, para comenzar mostramos que h es un homomorfismo de grupos, e.e. si tomamos $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ debemos mostrar que $h(A + B) = h(A) + h(B)$. En consecuencia de los insumos escogidos sigue que

$$A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \iff B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 100'

Luego,

$$\begin{aligned}
h(A+B) &= h\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right) = h\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+a_{12}+b_{12}+a_{21}+b_{21} \\ a_{11}+b_{11}+a_{12}+b_{12}+a_{22}+b_{22} \\ a_{11}+b_{11}-(a_{12}+b_{12})-(a_{21}+b_{21}) \\ a_{12}+b_{12}-(a_{22}+b_{22})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}+a_{12}+a_{21})+(b_{11}+b_{12}+b_{21}) \\ (a_{11}+a_{12}+a_{22})+(b_{11}+b_{12}+b_{22}) \\ (a_{11}-a_{12}-(a_{21})+(b_{11}-b_{12}-b_{21}) \\ (a_{12}-a_{22})+(b_{12}-b_{22})\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{21} \\ a_{11}+a_{12}+a_{22} \\ a_{11}-a_{12}-(a_{21} \\ a_{12}-a_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}+b_{12}+b_{21} \\ b_{11}+b_{12}+b_{22} \\ b_{11}-b_{12}-b_{21} \\ b_{12}-b_{22}\end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} = h(A)+h(B)
\end{aligned}$$

Luego, h es un homomorfismo de grupos. Ahora como h es un homomorfismo entonces para estudiar su inyectividad analizaremos su núcleo, o kernel conforme a las técnicas de siempre: e.e.

$$\begin{aligned}
A \in \ker(h) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h(A) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4\times 1)} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{21} \\ a_{11}+a_{12}+a_{22} \\ a_{11}-a_{12}-a_{21} \\ a_{12}-a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \left.\begin{array}{clcl} (1) & a_{11}+a_{12}+a_{21} & = & 0 \\ (2) & a_{11}+a_{12}+a_{22} & = & 0 \\ (3) & a_{11}-a_{12}-a_{21} & = & 0 \\ (4) & a_{12}-a_{22} & = & 0 \end{array}\right| \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \text{ de } ((3)+(1)) \text{ y } (4) \text{ sigue que } \left.\begin{array}{lcl} a_{11}+a_{12}+a_{21} & = & 0 \\ a_{11}+a_{12}+a_{22} & = & 0 \\ a_{11} & = & 0 \\ a_{12} & = & a_{22} \end{array}\right| \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a_{11} = 0 = a_{12} = a_{22} = a_{21} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, $\ker(h) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$, y h es inyectivo.

Finalmente para estudiar la sobreyectividad recordamos que debemos mostrar que Img $(h) = \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4\times 1)$, pero como h es función entonces tenemos que Img $(h) \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4\times 1)$. Así que sólo resta mostrar que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4\times 1) \subset$ Img (h), o sea que debemos resolver para $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4\times 1)$ arbitrario, la ecuación $h(X) = A$ para $X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$. Por tanto, supongamos que $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$ y entonces

$$h\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2+x_4 \\ x_1-x_2-x_3 \\ x_2-x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{clcl} (1) & x_1+x_2+x_3 & = & a_1 \\ (2) & x_1+x_2+x_4 & = & a_2 \\ (3) & x_1-x_2-x_3 & = & a_3 \\ (4) & x_2-x_4 & = & a_4 \end{array}\right| \overset{(1)+(3)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{crcl} (1) & x_1 & = & \frac{a_1+a_3}{2} \\ (2) & x_2+x_4 & = & a_2 - \frac{a_1+a_3}{2} \\ (3) & -x_2-x_3 & = & a_3 - \frac{a_1+a_3}{2} \\ (4) & x_2-x_4 & = & a_4 \end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{crcc} (1) & x_1 & = & \frac{a_1+a_3}{2} \\ (2) & x_2+x_4 & = & \frac{2a_2-a_1-a_3}{2} \\ (3) & -x_2-x_3 & = & \frac{2a_3-a_1-a_3}{2} \\ (4) & x_2-x_4 & = & a_4 \end{array}\right| \overset{(2)+(4)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{crcc} (1) & x_1 & = & \frac{a_1+a_3}{2} \\ (2) & x_2 & = & \frac{2a_4+2a_2-a_1-a_3}{4} \\ (3) & -x_2-x_3 & = & \frac{2a_3-a_1-a_3}{2} \\ (4) & x_2-x_4 & = & a_4 \end{array}\right| \overset{(4)-(2)}{\Longrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{crcc} (1) & x_1 & = & \frac{a_1+a_3}{2} \\ (2) & x_2 & = & \frac{2a_4+2a_2-a_1-a_3}{4} \\ (3) & -x_2-x_3 & = & \frac{2a_3-a_1-a_3}{2} \\ (4) & -x_4 & = & \frac{2a_4-2a_2+a_1+a_3}{4} \end{array}\right| \overset{(3)+(2)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{rcc} x_1 & = & \frac{a_1+a_3}{2} \\ x_2 & = & \frac{2a_4+2a_2-a_1-a_3}{4} \\ -x_3 & = & \frac{2a_4+a_3+2a_2-3a_1}{4} \\ -x_4 & = & \frac{2a_4-2a_2+a_1+a_3}{4} \end{array}\right|$$

Luego,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1+a_3}{2} & \frac{2a_4+2a_2-a_1-a_3}{4} \\ \frac{-2a_4-a_3-2a_2+3a_1}{4} & \frac{-2a_4+2a_2-a_1-a_3}{4} \end{pmatrix}$$

Y podemos comprobar directamente que

$$h\begin{pmatrix} \frac{a_1+a_3}{2} & \frac{2a_4+2a_2-a_1-a_3}{4} \\ \frac{-2a_4-a_3-2a_2+3a_1}{4} & \frac{-2a_4+2a_2-a_1-a_3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

Por tanto h es sobreyectivo y por ende con lo anteriormente probado h es un isomorfismo.

[3] Si definimos $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(a,b,c) = (a+\lambda b+c)+(a-b)x+\lambda cx^2$ entonces

[a] Demuestre que T es un homomorfismo de grupos $(\forall \lambda, \lambda \in \mathbb{R})$

En efecto, si tomamos $u = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3$ y $v = (v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3) \\
&= (u_1+v_1+\lambda(u_2+v_2)+u_3+v_3)+(u_1+v_1-u_2-v_2)x+\lambda(u_3+v_3)x^2 \\
&= (u_1+v_1+\lambda u_2+\lambda v_2+u_3+v_3)+(u_1+v_1-u_2-v_2)x+(\lambda u_3+\lambda v_3)x^2 \\
&= (u_1+\lambda u_2+u_3)+(v_1+\lambda v_2+v_3)+(u_1-u_2)x+(v_1-v_2)x+\lambda u_3x^2+\lambda v_3x^2 \\
&= (u_1+\lambda u_2+u_3)+(u_1-u_2)x+\lambda u_3x^2+(v_1+\lambda v_2+v_3)+(v_1-v_2)x+\lambda v_3x^2 \\
&= T(u_1,u_2,u_3)+T(v_1,v_2,v_3) \\
&= T(u)+T(v)
\end{aligned}$$

Así que T es un homomorfismo de grupos

[b] Determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T \text{ es sobreyectivo}\}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathbb{S} &\Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \wedge T \text{ es sobreyectivo} \\
&\Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \wedge \text{Img }(T) = \mathbb{R}_2[x]
\end{aligned}$$

Luego para determinar λ que cumpla las condiciones, debemos estudiar la Img (T), así que

$$\begin{aligned}
p(x) \in \text{Img }(T) &\Longleftrightarrow p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge (\exists u; u \in \mathbb{R}^3) : T(u) = p(x) \\
&\Longleftrightarrow p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge u = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^4 : T(u_1,u_2,u_3) = a_0+a_1x+a_2x^2 \\
&\Longleftrightarrow p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge (u_1+\lambda u_2+u_3)+(u_1-u_2)x+\lambda u_3x^2 = a_0+a_1x+a_2x^2 \\
&\Longleftrightarrow p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge \begin{array}{c|rcl|} (1) & u_1+\lambda u_2+u_3 &=& a_0 \\ (2) & u_1-u_2 &=& a_1 \\ (3) & \lambda u_3 &=& a_2 \\ \hline \end{array} \quad (*)
\end{aligned}$$

Ahora analicemos la situación planteada en $(*)$.

De $(1)-(2)$ sigue que

$$\begin{array}{crcl|} (1) & \lambda u_2+u_2+u_3 &=& a_0-a_1 \\ (2) & u_1-u_2 &=& a_1 \\ (3) & \lambda u_3 &=& a_2 \\ \hline \end{array} \overset{(1)+(3)}{\Longrightarrow} \begin{array}{rcl|} \lambda u_2+u_2+\lambda u_3+u_3 &=& a_0-a_1+a_2 \\ u_1-u_2 &=& a_1 \\ \lambda u_3 &=& a_2 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl|} (\lambda+1)(u_2+u_3) &=& a_0-a_1+a_2 \\ u_1-u_2 &=& a_1 \\ \lambda u_3 &=& a_2 \\ \hline \end{array} \overset{\substack{\lambda+1 \neq 0 \\ \lambda \neq 0}}{\Longrightarrow} \begin{array}{rcl|} u_2+u_3 &=& \dfrac{a_0-a_1+a_2}{\lambda+1} \\ u_1-u_2 &=& a_1 \\ u_3 &=& \dfrac{a_2}{\lambda} \\ \hline \end{array} \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl|} u_2 &=& \dfrac{a_0-a_1+a_2}{\lambda+1} - \dfrac{a_2}{\lambda} \\ u_1 &=& a_1 + \dfrac{a_0-a_1+a_2}{\lambda+1} - \dfrac{a_2}{\lambda} \\ u_3 &=& \dfrac{a_2}{\lambda} \\ \hline \end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned} h(u_1,u_2,u_3) &= \left(a_1+\frac{a_0-a_1+a_2}{\lambda+1}-\frac{a_2}{\lambda},\frac{a_0-a_1+a_2}{\lambda+1}-\frac{a_2}{\lambda},\frac{a_2}{\lambda}\right) \\ &= a_0+a_1x+a_2x^2 \qquad (\lambda+1\neq 0)\wedge(\lambda\neq 0) \end{aligned}$$

Así que

$$\mathbb{S}=\mathbb{R}-\{-1,0\}$$

. Ya que si $\lambda+1=0$ entonces tenemos $a_0-a_1+a_2=0$ y si $\lambda=0$ entonces $a_2=0$. Así que en cualquier caso T no es sobreyectiva

[4] Para $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ definamos la función

$$A:\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1)\longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \text{ tal que } A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Demuestre que

$$A\in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))\Longrightarrow A \text{ es un homomorfismo inyectivo}$$

En efecto, si $u=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $v=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} A(u+v) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2) \\ c(x_1+x_2)+d(y_1+y_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_1+ax_2+by_1+by_2 \\ cx_1+cx_2+dy_1+dy_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_1+by_1 \\ cx_1+dy_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ax_2+by_2 \\ cx_2+dy_2 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= A(u)+A(v) \end{aligned}$$

Luego, A es un homomorfismo de grupo. Además la información que tenemos es que $\det(A)\neq 0$, así que sólo resta estudiar el núcleo de A, y para ello

$$\begin{aligned} u\in\ker(A) &\Longleftrightarrow u\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1)\wedge A(u)=0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1)} \\ &\Longleftrightarrow u=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1)\wedge A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow u=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1)\wedge \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow u=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1)\wedge \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow u=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1)\wedge \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\text{ Pues, } \det(A)\neq 0) \\ &\Longrightarrow u=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1)\wedge \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow u=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así que

$$\ker(A) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

O sea A es inyectiva.