Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Módulo Básico de Ingeniería

Álgebra II[1] - Una solución de la Prueba Acumulativa
Profesor Ricardo Santander Baeza
13 de Diciembre del 2012

[1] Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & b \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & c \end{array}\right| \qquad (*)$$

Demuestre que $\mathbb{W} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid (*) \text{ Tiene solución } \} \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
Solución
Para mostrar que $\mathbb{W}$ es un subespacio partimos con lo siguiente:

$$(0,0,0) \in \mathbb{R}^3 \wedge \left.\begin{array}{rcrcrcr} -2\cdot 0 & + & 0 & + & 0 & = & 0 \\ 0 & - & 2\cdot 0 & + & 0 & = & 0 \\ 0 & + & 0 & - & 2\cdot 0 & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow (0,0,0) \in \mathbb{W} \Longrightarrow \mathbb{W} \neq \emptyset$$

Ahora, observen lo siguiente, para $(a,b,c) \in \mathbb{W}$ tenemos su matriz ampliada $(A|B)$ asociada, e.e.

$$\begin{aligned} (A|B) &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & | & a \\ 1 & -2 & 1 & | & b \\ 1 & 1 & -2 & | & c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & | & a+2c \\ 0 & -3 & 3 & | & b-c \\ 1 & 1 & -2 & | & c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & a+b+c \\ 0 & -3 & 3 & | & b-c \\ 1 & 1 & -2 & | & c \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & c \\ 0 & -3 & 3 & | & b-c \\ 0 & 0 & 0 & | & a+b+c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & c \\ 0 & 1 & -1 & | & \frac{c-b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & a+b+c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & \frac{2c+b}{3} \\ 0 & 1 & -1 & | & \frac{c-b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & a+b+c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$(a,b,c) \in \mathbb{W} \iff (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \wedge a+b+c = 0$$

Así que para $u \in \mathbb{W}$ y $v \in \mathbb{W}$ tenemos que

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} &\iff u = (a_1,b_1,c_1) \in \mathbb{R}^3 \wedge a_1+b_1+c_1 = 0 \\ v \in \mathbb{W} &\iff v = (a_2,b_2,c_2) \in \mathbb{R}^3 \wedge a_2+b_2+c_2 = 0 \end{aligned}$$

Luego,

$$u+v = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2) \in \mathbb{R}^3 \wedge a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2 = a_1+b_1+c_1+a_2++b_2+c_2 = 0$$

Así que $(u+v) \in \mathbb{W}$.
Además, para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda u = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1) \in \mathbb{R}^3 \wedge \lambda a_1 + \lambda b_1 + \lambda c_1 = \lambda(a_1+b_1+c_1) = \lambda 0 = 0$$

Luego $\lambda u \in \mathbb{W}$ y $\mathbb{W}$ es un subespacio

[2] Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ entonces demuestre que

$$A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)) \Longrightarrow c = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right\} \text{ es una base de } \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$$

En efecto
Como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)) = 3$ y la cardinalidad de c también es 3 entonces aplicando una de nuestras propiedades concluimos que, para que c sea una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$ basta que sea un conjunto linealmente independiente ó un sistema de generadores, con esto en mente estudiemos que condiciones para que c sea una base.

Si suponemos que $c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces

[1]Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

$$c_1\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ a_{32}\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} a_{13}\\ a_{23}\\ a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl|} c_1a_{11}+c_2a_{12}+c_3a_{13} &=& 0\\ c_1a_{21}+c_2a_{22}+c_3a_{23} &=& 0\\ c_1a_{31}+c_2a_{32}+c_3a_{33} &=& 0\\ \hline \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \overset{A\in\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3))}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Así que c es una base siempre que $A\in\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3))$.

[3] Si $\alpha=\left\{\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&5\\4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&4\\4&a\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces determine el conjunto

$$\beta=\{a\in\mathbb{R}\mid \alpha \text{ No es una base de } \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\}$$

Solución, consideremos para partir $a\in\beta$ entonces estudiemos las condiciones para que β no sea un conjunto linealmente independiente.
Si $c_1\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}6&5\\4&2\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}5&4\\4&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ entonces debe suceder lo siguiente

$$\begin{pmatrix} 3c_1+2c_2+6c_3+5c_4 & 2c_1+c_2+5c_3+4c_4\\ 2c_1+c_2+4c_3+4c_4 & c_1+2c_3+ac_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\iff \begin{array}{rcl|} 3c_1+2c_2+6c_3+5c_4 &=& 0\\ 2c_1+c_2+5c_3+4c_4 &=& 0\\ 2c_1+c_2+4c_3+4c_4 &=& 0\\ c_1+2c_3+ac_4 &=& 0\\ \hline\end{array}\quad (*)$$

Ahora estudiamos el sistema $(*)$ por ejemplo usando el teorema del rango, e.e. escalonamos la matriz de coeficientes del sistema $(*)$.

$$\begin{pmatrix}3&2&6&5\\2&1&5&4\\2&1&4&4\\1&0&2&a\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0&2&0&5-3a\\0&1&1&4-2a\\0&1&0&4-2a\\1&0&2&a\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&2&a\\0&1&1&4-2a\\0&1&0&4-2a\\0&2&0&5-3a\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&2&a\\0&1&1&4-2a\\0&0&-1&0\\0&0&-2&-3+a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&a\\0&1&1&4-2a\\0&0&1&0\\0&0&-2&-3+a\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0&a\\0&1&0&4-2a\\0&0&1&0\\0&0&0&-3+a\end{pmatrix}(**)$$

Si en $(**)$ hacemos $a=3$ entonces $\rho(A)=3<4$ así que el sistema tiene infinitas soluciones de la forma

$$c_1=-3c_4\ \wedge\ c_2=2c_4\ \wedge\ c_3=0,\quad (c_4\in\mathbb{R})$$

e.e.

$$-3c_4\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}+2c_4\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}6&5\\4&2\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}5&4\\4&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Luego $\beta=\{3\}$

[4] Si en el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ definimos para cada $p(x)\in\mathbb{R}_2[x]$ y $q(x)\in\mathbb{R}_2[x]$ el producto interno

$$\langle p(x),q(x)\rangle=p(-1)\cdot q(-1)+p(0)\cdot q(0)+p(1)\cdot q(1)\tag{1}$$

Si además consideramos el subespacio $\mathbb{W}=\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbb{R}^2[x]\mid a_0-a_1+a_2=0\}$ entonces respecto del producto interno definido en (1)

- Determine $P_{\mathbb{W}}:\mathbb{R}_2[x]\longmapsto\mathbb{W}$ la proyección ortogonal

  Solución, iniciamos buscando una base ortogonal para $\mathbb{W}$, respecto del producto interno definido en (1)

$$\begin{array}{rcl} p(x) \in \mathbb{W} & \iff & p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \ \wedge \ a_0 - a_1 + a_2 = 0 \\ & \iff & p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \ \wedge \ a_0 = a_1 - a_2 \\ & \iff & p(x) = a_1 - a_2 + a_1 x + a_2 x^2; a_1 \in \mathbb{R}; a_2 \in \mathbb{R} \\ & \iff & p(x) = (a_1 + a_1 x) + (-a_2 + a_2 x^2); a_1 \in \mathbb{R}; a_2 \in \mathbb{R} \\ & \iff & p(x) = a_1(1+x) + a_2(-1+x^2); a_1 \in \mathbb{R}; a_2 \in \mathbb{R} \\ & \iff & p(x) \in \{a_1(1+x) + a_2(-1+x^2) \mid a_1 \in \mathbb{R}; a_2 \in \mathbb{R}\} \\ & \iff & p(x) \in \langle \{1+x, -1+x^2\} \rangle \end{array}$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \langle \{\underbrace{1+x}_{\in \mathbb{W}}, \underbrace{-1+x^2}_{\in \mathbb{W}}\} \rangle$$

Además de que $\alpha = \{1+x, -1+x^2\}$, genera a $\mathbb{W}$ es tambi'en linealmente independiente, pues

$$a(1+x) + b(-1+x^2) = 0 + 0x + 0x^2 \Rightarrow a - b + ax + bx^2 = 0 + 0x + 0x^2 \Rightarrow a = b = 0$$

Ahora, examinemos la ortogonalidad de α

$$\langle 1+x, -1+x^2 \rangle = (1+(-1)) \cdot (-1+(-1)^2) + (1+0) \cdot (-1+0^2) + (1+1) \cdot (-1+1^2) = -1$$

Luego, ortogonalizamos usando el proceso de Gram Schmidt.

$$\begin{array}{rcl} v_1' & = & 1+x \\ v_2' & = & -1+x^2 - \dfrac{\langle -1+x^2, 1+x \rangle}{\langle 1+x, 1+x \rangle} (1+x) \\ & = & -1+x^2 - \dfrac{(-1}{5} (1+x) \\ & = & -1+x^2 + \dfrac{1}{5} (1+x) \\ & = & -1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}x + x^2 \\ & = & -\dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5}x + x^2 \end{array}$$

Ahora, comprobamos

$$\left\langle 1+x, -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}x + x^2 \right\rangle = 0 + -\frac{4}{5} + 2 \cdot (-\frac{4}{5} + \frac{1}{5} + 1) = -\frac{4}{5} + \frac{4}{5} = 0$$

Así $\alpha' = \left\{1+x, -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}x + x^2\right\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{W}$ y podemos definir la proyección ortogonal $P_{\mathbb{W}}$

$$P_{\mathbb{W}}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \frac{\langle a_0 + a_1 x + a_2 x^2, 1+x \rangle}{\langle 1+x, 1+x \rangle}(1+x) + \frac{\langle a_0 + a_1 x + a_2 x^2, -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}x + x^2 \rangle}{\langle -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}x + x^2, -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}x + x^2 \rangle}(-\frac{4}{5} + \frac{1}{5}x + x^2)...$$

La parte (b) ha sido eliminada.