Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Módulo Básico Facultad de Ingeniería

Guía de Ejercicios N°1
Coordinación de Álgebra II
Ricardo Santander Baeza
abril del 2013

El Trabajo dignifica
al ser humano

Estimados estudiantes, los profesores que componen esta coordinación, les proponen estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, si es que aún no lo han hecho, sentir por una parte el placer de estudiar matemática, y por otra desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente, operar con:

[1] Matrices y Determinantes
[2] Sistemas de ecuaciones lineales

1. Algunas sugerencias

[1] Lea cuidadosamente el problema.
[2] Reconozca lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.
[3] Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor !. Este acto nunca esta de más.
[4] Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

2. Matrices y Determinantes

[1] Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Determine A^n, para $n \in \mathbb{N}$.

[2] Demuestre usando Inducción matemática que

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

[3] Si $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ entonces calcule usando propiedades:

- $\det(Adj(A))$
- $\det(A^{-1})$
- $\det(A \cdot A^{-1})$

[4] Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. demuestre que

$$A = A^t \implies Adj(A) = (Adj(A))^t$$

[5] Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -\alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \beta & \alpha & -\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ entonces

[a] Determine el conjunto

$$\mathbb{I} \;=\; \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)\}$$

[b] Para $u \in \mathbb{I}$, (si $\mathbb{I} \neq \emptyset$), determine A^{-1}

[6] Si $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{pmatrix} = -1$ entonces calcule $\det \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \end{pmatrix}$

[7] Demuestre usando propiedades que

$$\det \begin{pmatrix} x+y & y+z & z+x \\ a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} z & x & y \\ c & a & b \\ r & p & q \end{pmatrix}$$

[8] Demuestre que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \tan\gamma \\ -\tan\gamma & \tan\beta & 1 \\ \tan\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

[9] Si $A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ b & b & a & b \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$entonces

- Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

- Grafique el conjunto $\mathbb{S}$

[10] Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

[11] Demuestre que

$$\det\begin{pmatrix} x+a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & x+a^2 & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & x+a^3 & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & x+a^4 \end{pmatrix} = \frac{x^3(a(x+a^4)-(x+a))}{a-1}$$

3. Sistemas de Ecuaciones lineales

[1] Usando el teorema del rango determine si los siguientes sistemas tienen o no solución, en caso afirmativo, determine la solución o las soluciones.

$$(1)\ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & & & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 9y & - & 3z & = & 0 \end{array} \qquad (2)\ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & - & 7z & = & 6 \\ 2x & + & y & + & 8z & = & 2 \\ 6x & + & 4y & - & 14z & = & 5 \end{array}$$

$$(3)\ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & 2 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & -18 \end{array} \qquad (4)\ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$(5)\ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & -4 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & = & -8 \end{array} \qquad (6)\ \begin{array}{rcrcrcr} (1-i)x & - & iy & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & (1+i)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & -i \end{array}$$

[2] Dado el sistema lineal

$$\begin{array}{rcl} kx+y & = & 1 \\ x+ky & = & 1 \end{array} \qquad (*)$$

Determine los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \{k \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene soluciones}\} \\ \mathbb{S} &= \{k \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene infinitas solución}\} \\ \mathbb{S}. &= \{k \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ No tiene solución}\} \end{aligned}$$

[3] Dado el sistema lineal

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & by & - & cz & = & 0 \\ -ax & + & y & - & cz & = & 0 \\ -ax & - & by & + & z & = & 0 \end{array} \qquad (*)$$

Demuestre que si $(*)$ no tiene solución única entonces se verifica

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$$

[4] Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + (a^2-4)x_3 & = & a \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{S}_1 & = & \{a \in \mathbb{R} \mid (*)\text{Tiene solución}\} \\ \mathbb{S}_1 & = & \{a \in \mathbb{R} \mid (*)\text{Tiene solución única}\} \\ \mathbb{S}_1 & = & \{a \in \mathbb{R} \mid (*)\text{No tiene solución}\} \end{array}$$

[5] Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} (1-\lambda)x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & (2-\lambda)x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & (1-\lambda)x_3 & = & 0 \end{array}\right| \qquad (\star)$$

Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ tiene infinitas soluciones}\}$$

[6] Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ entonces Determine el conjunto

$$S \;=\; \{\lambda \in \mathbb{R} \mid AX = \lambda X\}$$

[7] Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} dx & + & (2d-1)y & + & (d+2)z & = & 1 \\ & & (d-1)y & + & (d-3)z & = & 1+d \\ dx & + & (3d-2)y & + & (3d+1)z & = & 2-d \end{array}\right| \qquad (\star)$$

[a] Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{d \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ tiene solución}\}$$

[b] Para $d \in \mathbb{S}$, (Si $\mathbb{S} \neq \emptyset$), determine el conjunto

$$\mathbb{X} \;=\; \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1) \mid X \text{ es solución de}(*) \right\}$$

[8] Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & & & 3z & = & a+1 \\ -ax & + & y & & & = & -a \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los conjuntos:

$\mathbb{S}_1 = \{a \in \mathbb{R}/$ el sistema $(*)$ tiene solución $\}$
$\mathbb{S}_2 = \{a \in \mathbb{R}/$ el sistema $(*)$ tiene infinitas soluciones $\}$
$\mathbb{S}_3 = \{a \in \mathbb{R}/$ el sistema $(*)$ no tiene soluciones $\}$

[9] Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & (m-1)z & = & m \\ x & + & y & + & z & = & m+1 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los conjuntos:
$\mathbb{S}_1 = \{m \in \mathbb{R}/$ el sistema $(*)$ tiene solución única$\}$
$\mathbb{S}_2 = \{m \in \mathbb{R}/$ el sistema $(*)$ tiene infinitas soluciones$\}$
$\mathbb{S}_3 = \{m \in \mathbb{R}/$ el sistema $(*)$ no tiene solución $\}$

[10] Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{lcr} x_1 + x_2 - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \\ x_1 - x_2 + (a^2+1)x_3 & = & a \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{S}_1 & = & \{a \in \mathbb{R} \mid (*)\text{Tiene solución}\} \\ \mathbb{S}_1 & = & \{a \in \mathbb{R} \mid (*)\text{Tiene solución única}\} \\ \mathbb{S}_1 & = & \{a \in \mathbb{R} \mid (*)\text{No tiene solución}\} \end{array}$$

[11] Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcccccr} ax & + & by & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & (2b-1)y & + & 3z & = & 1 \\ ax & + & by & + & (b+3)z & = & 2b-1 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine

[a] $S_1 = \{(a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (*)$ tiene solución única$\}$

[b] $S_2 = \{(a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (*)$ tiene infinitas soluciones $\}$

[c] $S_3 = \{(a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (*)$ no tiene solución $\}$

BUEN TRABAJO !!!