Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Módulo Básico de Ingeniería

Álgebra II[1]
Una solución del Control N° 4
Profesor Ricardo Santander Baeza
29 de Noviembre del 2012 - 11.20 horas

[1] Si $\alpha=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\subset\mathbb{R}^4$ tal que $v_i=(x_i,y_i,z_i,t_i)$, para $i=1,2,3,4$ y definimos $\beta=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}\subset\mathbb{R}^4$ tal que $w_s=\displaystyle\sum_{i=1}^{s} iv_i$, para $s=1,2,3,4$ entonces demuestre que

$$\alpha \text{ base de } \mathbb{R}^4 \Longrightarrow \beta \text{ base de } \mathbb{R}^4$$

Solución. Observemos que

$$\begin{array}{rcll} w_1 &=& v_1 & \Longleftrightarrow\ v_1=w_1\\ w_2 &=& v_1+2v_2 & \Longleftrightarrow\ v_2=\dfrac{w_2-w_1}{2}\\ w_3 &=& v_1+2v_2+3v_3 & \Longleftrightarrow\ v_3=\dfrac{w_3-w_2}{3}\\ w_4 &=& v_1+2v_2+3v_3+4v_4 & \Longleftrightarrow\ v_4=\dfrac{w_4-w_3}{4}\end{array} \tag{1}$$

Ahora, mostremos que β es un conjunto linealmente independiente, usando las técnicas habituales, e.e.

$$\begin{aligned} a_1w_1+a_2w_2+a_3w_3+a_4w_4=(0,0,0,0) &\Longrightarrow a_1v_1+a_2(v_1+2v_2)+a_3(v_1+2v_2+3v_3)+\\ &\qquad a_4(v_1+2v_2+3v_3+4v_4)=(0,0,0,0)\\ &\Longrightarrow (a_1+a_2+a_3+a_4)v_1+2(a_2+a_3+a_4)v_2+3(a_3+a_4)v_3+\\ &\qquad 4a_4v_4)=(0,0,0,0)\\ &\overset{\alpha\ \text{Li}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{rcl} a_1+a_2+a_3+a_4 &=& 0\\ 2(a_2+a_3+a_4) &=& 0\\ 3(a_3+a_4) &=& 0\\ 4a_4 &=& 0\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} a_1+a_2+a_3+a_4 &=& 0\\ a_2+a_3+a_4 &=& 0\\ a_3+a_4 &=& 0\\ a_4 &=& 0\end{array}\right|\\ &\Longrightarrow a_4=a_3=a_2=a_1=0\end{aligned}$$

Luego β es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^4$

Finalmente, como α es una base entonces en particular es un sistema de generadores y por tanto, para cada $u\in\mathbb{R}^4$ **existen escalares adecuados** tales que u se escribe como combinación lineal de v_i para $i=1,2,3,4$. e.e.

$$u=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4 \Longrightarrow u=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4 \tag{2}$$

Así que aplicando la equivalencia (1) en la representación (2) tenemos que

$$\begin{aligned} u=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4 &\Longleftrightarrow u=a_1w_1+a_2\frac{w_2-w_1}{2}+a_3\frac{w_3-w_2}{3}+a_4\frac{w_4-w_3}{4}\\ &\Longleftrightarrow u=\frac{12a_1w_1+6a_2w_2-6a_2w_1+4a_3w_3-4a_3w_2+3a_4w_4-3a_4w_3}{12}\\ &\Longleftrightarrow u=\frac{(12a_1-6a_2)w_1+(6a_2-4a_3)w_2+(4a_3-3a_4)w_3+3a_4w_4}{12}\\ &\Longleftrightarrow u=\left(\frac{12a_1-6a_2}{12}\right)w_1+\left(\frac{6a_2-4a_3}{12}\right)w_2+\left(\frac{4a_3-3a_4)}{12}\right)w_3+\frac{3a_4}{12}\ w_4\\ &\Longleftrightarrow u=\left(\frac{2a_1-a_2}{2}\right)w_1+\left(\frac{3a_2-2a_3}{6}\right)w_2+\left(\frac{4a_3-3a_4)}{12}\right)w_3+\frac{a_4}{4}\ w_4\end{aligned}$$

Luego, β es un sistema de generadores y entonces una base de $\mathbb{R}^4$

[1]Cada problema vale 3.0 puntos
Tiempo 80'

[2] Si $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1)$entonces demuestre que

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \alpha \text{ es una base de } \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1)$$

Solución

Como $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) = 2$ entonces para mostrar que α es base basta mostrar que α es linealmente independiente, o un sistema de generadores, en este caso mostraremos que α es linealmente independiente, en consecuencia

$$\begin{aligned}
a_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad & \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 \\ a_1y_1 + a_2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \overset{\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \neq 0}{\Longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a_1 = a_2 = 0
\end{aligned}$$

Luego, α es linealmente independiente y por tanto una base.