Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Módulo Básico de Ingeniería

Álgebra II[1] - Una Solución del Control Nº 3
Profesor Ricardo Santander Baeza
22 de Noviembre del 2012 - 11.20 horas

[1] Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a & + & x\,b & + & c & = & 1\\ x\,a & + & b & + & (x-1)c & = & x\\ a & + & b & + & c & = & x+1 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Usando el teorema del rango, determine el conjunto

$$S=\{x\in\mathbb{R}\mid \text{ el sistema } (*) \text{ tiene solución única}\}$$

Solución supongamos que $x\in\mathbb{R}$ entonces aplicamos el teorema del rango al sistema $(*)$, lo que nos obliga a estudiar el rango de la matriz ampliada $(A|B)$, asociada a $(*)$, en consecuencia, aplicamos operaciones elementales a dicha matriz para leer su rango.

$$(A|B)=\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & | & 1\\ x & 1 & (x-1) & | & x\\ 1 & 1 & 1 & | & x+1\end{pmatrix}\begin{array}{c}(l_2\to l_2-xl_1)\\ \sim\\ (l_3\to l_3-l_1)\end{array}\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & | & 1\\ 0 & (1-x^2) & -1 & | & 0\\ 0 & (1-x) & 0 & | & x\end{pmatrix}\qquad (**)$$

Llega el momento del análisis profundo, en efecto de $(**)$, sigue que:

[a] Si $x=1$ entonces

$$(A|B)\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 1\end{pmatrix}\begin{array}{c}(l_1\to l_1+l_2)\\ \sim\end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 1\end{pmatrix}$$

Luego, en este caso $\rho(A|B)=3$ y $\rho(A)=2$, así que $(*)$ no tiene solución y entonces $1\notin S$.

[b] Si $x=-1$ entonces

$$\begin{aligned}(A|B)\quad\sim\quad&\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & -1 & | & 0\\ 0 & 2 & 0 & | & -1\end{pmatrix}\begin{array}{c}(l_2\leftrightarrow l_3)\\ \sim\end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1\\ 0 & 2 & 0 & | & -1\\ 0 & 0 & -1 & | & 0\end{pmatrix}\begin{array}{c}(l_2\to \frac{1}{2}l_2)\\ \sim\\ (l_3\to -l_3)\end{array}\\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1\\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & | & 0\end{pmatrix}\begin{array}{c}(l_1\to l_1+l_2)\\ \sim\\ (l_1\to l_1-l_3)\end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & | & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Luego, en este caso $\rho(A|B)=3$ y $\rho(A)=3$, así que $(*)$ tiene solución única y entonces $\{-1\}\subset S$, equivalentemente $-1\in S$.

[c] Si $x\neq 1$ y $x\neq -1$ entonces

$$\begin{aligned}(A|B)\quad\sim\quad&\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & | & 1\\ 0 & (1-x^2) & -1 & | & 0\\ 0 & (1-x) & 0 & | & x\end{pmatrix}\begin{array}{c}(l_3\to \frac{1}{1-x}l_3)\\ \sim\end{array}\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & | & 1\\ 0 & (1-x^2) & -1 & | & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{x}{(1-x)}\end{pmatrix}\begin{array}{c}(l_1\to l_1-xl_3)\\ \sim\\ (l_2\to l_2-(1-x^2)l_3)\end{array}\\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1-\frac{x^2}{(1-x)}\\ 0 & 0 & -1 & | & (-x-x^2)\\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{x}{(1-x)}\end{pmatrix}\begin{array}{c}(l_2\leftrightarrow l_3)\\ \sim\\ (l_3\to -l_3)\end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1-\frac{x^2}{(1-x)}\\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{x}{(1-x)}\\ 0 & 0 & 1 & | & (x+x^2)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Luego, en este caso $\rho(A|B)=3$ y $\rho(A)=3$, así que $(*)$ tiene solución única y entonces

$$S\quad=\quad\mathbb{R}-\{1\}$$

[1] Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 80'

[2] Si $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \wedge x - y - z - 2t = 0\} \subset \mathbb{R}^4$ entonces demuestre que $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$, (es decir $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^4$)

En efecto, si aplicamos la caracterización que dice que hacen los elementos de $\mathbb{W}$, o que propiedades cumplen estos, entonces debemos proseguir como sigue:

- En primer lugar mostramos que $\mathbb{W} \neq \emptyset$, y en este caso podemos observar que

$$\big((0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ [0+0+0+0 = 0 \wedge 0-0-0-2\cdot 0 = 0]\big) \Longrightarrow (0,0,0,0) \in \mathbb{W} \Longrightarrow \mathbb{W} \neq \emptyset$$

- Sean $u \in \mathbb{W}$ y $v \in \mathbb{W}$ entonces debemos mostrar que $(u+v) \in \mathbb{W}$. Para ver esto procedemos como sigue, primero analizamos los insumos que tenemos, e.e.

$$\begin{array}{lcll} u \in \mathbb{W} & \Longleftrightarrow & u = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in \mathbb{R}^4 \wedge x_1 + y_1 + z_1 + t_1 = 0 \wedge x_1 - y_1 - z_1 - 2t_1 = 0 & (*) \\ v \in \mathbb{W} & \Longleftrightarrow & v = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4 \wedge x_2 + y_2 + z_2 + t_2 = 0 \wedge x_2 - y_2 - z_2 - 2t_2 = 0 & (**) \end{array}$$

Ahora,

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2) \in \mathbb{R}^4 \wedge \text{ por otra parte}$$

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 + t_1 + t_2 = \underbrace{(x_1 + y_1 + z_1 + t_1)}_{(*)} + \underbrace{(x_2 + y_2 + z_2 + t_2)}_{(**)} = 0 + 0 = 0$$

$$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) - 2(t_1 + t_2) = \underbrace{x_1 - y_1 - z_1 - 2t_1}_{(*)} + \underbrace{x_2 - y_2 - z_2 - 2t_2}_{(**)} = 0 + 0 = 0$$

Así que $(u + v) \in \mathbb{W}$.

- Finalmente si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{W}$ como encima entonces debemos mostrar que $\lambda u \in \mathbb{W}$. Usando los insumos ya procesados obtenemos que

$$\lambda u = \lambda(x_1, y_1, z_1, t_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1, \lambda t_1) \in \mathbb{R}^4, \text{ y por otra parte}$$

$$\lambda x_1 + \lambda y_1 + \lambda z_1 + \lambda t_1 = \lambda \underbrace{(x_1 + y_1 + z_1 + t_1)}_{(*)} = \lambda \cdot 0 = 0$$

$$\lambda x_1 - \lambda y_1 - \lambda z_1 - 2\lambda t_1 = \lambda \underbrace{(x_1 - y_1 - z_1 - t_1)}_{(**)} = \lambda \cdot 0 = 0$$

Así que $\lambda u \in \mathbb{W}$, y entonces $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}$

Una comprobación alternativa, es que preguntemos específicamente a los vectores de $\mathbb{W}$, quienes son, y para ello podemos proceder como sigue.

$$\begin{aligned}
u \in \mathbb{W} & \Longleftrightarrow u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x + y + z + t = 0 \wedge x - y - z - 2t = 0 \\
& \Longleftrightarrow u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \begin{array}{|rcl|} x + y + z + t & = & 0 \\ x - y - z - 2t & = & 0 \\ \hline \end{array} \Longleftrightarrow u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge (A|B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge (A|B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge (A|B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x = \frac{1}{2}t \wedge y = -\frac{3}{2}t - z \\
& \Longleftrightarrow u = \left(\frac{1}{2}t, -\frac{3}{2}t - z, z, t\right);\ z \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow u = (0, -z, z, 0) + \left(\frac{1}{2}t, -\frac{3}{2}t, 0, t\right);\ z \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R} \\
& \Longleftrightarrow u = z\,(0, -1, 1, 0) + t\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1\right);\ z \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \left\{ z\,(0, -1, 1, 0) + t\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1\right);\ z \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ (0, -1, 1, 0), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1\right) \right\} \right\rangle$$

[3] Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{V}$. Si para $\lambda \in \mathbb{R}$, construimos el conjunto $\beta = \{w_1, w_2, w_3\} \subset \mathbb{V}$ tal que $w_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \lambda\, v_j$, para $i = 1, 2, 3$. Determine el conjunto

$$S \quad = \quad \{\lambda \in \mathbb{R} \mid [\alpha \text{ linealmente independiente } \Longrightarrow \beta \text{ linealmente independiente }]\}$$

Solución, si $\lambda \in S$ entonces

$$\lambda \in S \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R} \;\wedge\; [\alpha \text{ linealmente independiente } \Longrightarrow \beta \text{ linealmente independiente }]$$

Ahora, estudiemos las condiciones para que β sea linealmente independiente, con el antecedente que α lo es.

$$\begin{aligned}
aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0_{\mathbb{V}} &\Longrightarrow a(\lambda v_1) + b(\lambda v_1 + \lambda v_2) + c(\lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3) = 0_{\mathbb{V}} \\
&\Longrightarrow \lambda(a+b+c)v_1 + \lambda(b+c)v_2 + \lambda c v_3 = 0_{\mathbb{V}} \\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{crcl}
(1) & \lambda(a+b+c) & = & 0 \\
(2) & \lambda(b+c) & = & 0 \\
(3) & \lambda c & = & 0
\end{array}\right| \quad (*)
\end{aligned}$$

Ahora, si en la ecuación (3) de $(*)$ sigue que

$$\lambda c = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \quad \vee \quad c = 0$$

Si $\lambda = 0$ entonces $c \in \mathbb{R}$ y β es linealmente dependiente, y por tanto $\lambda = 0 \notin S$.

Si $\lambda \neq 0$ entonces $\left.\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 0 \\ b+c & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow 0 = c = b = a$ y β es linealmente independiente, y por tanto $S = \mathbb{R} - \{0\}$.