Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Módulo Básico de Ingeniería

Álgebra II[1] - Una solución del Control Nº 2
Profesor Ricardo Santander Baeza
11 de Octubre del 2012

(1) Si $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ y $\mathbb{S} = \{a \in \mathbb{R} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$ entonces

[a] Demuestre que $\mathbb{S} \neq \emptyset$

Solución

$$a \in \mathbb{S} \iff a \in \mathbb{R} \wedge A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \iff a \in \mathbb{R} \wedge \det(A) = 0:$$

Por tanto, de acuerdo a nuestras propiedades, si $a = 1$ $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$. Así que $1 \in \mathbb{S}$ y $\mathbb{S} \neq \emptyset$

[b] Determine explícitamente $\mathbb{S}$

Solución

$$a \in \mathbb{S} \iff a \in \mathbb{R} \wedge A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \iff a \in \mathbb{R} \wedge \det(A) = 0$$

Así que, debemos calcular $\det(A)$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix} \\
&= -(1-a)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -(1-a)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 0 & 1 & 2+a \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -(1-a)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2+a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -(1-a)^3(3+a)
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
a \in \mathbb{S} &\iff a \in \mathbb{R} \wedge A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \iff a \in \mathbb{R} \wedge \det(A) = 0 \\
&\iff a \in \mathbb{R} \wedge -(1-a)^3(3+a) = 0 \\
&\iff a \in \mathbb{R} \wedge (a-1)^3 = 0 \vee (3+a) = 0
\end{aligned}$$

Como $(a-1)^3 = (a-1)(a^2+a+1)$ y $(a^2+a+1) \neq 0$ $(\forall a; a \in \mathbb{R})$ entonces $\mathbb{S} = \{-3, 1\}$

(2) Si $A = \begin{pmatrix} 1+a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & 1+a^2 & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & 1+a^3 & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & 1+a^4 \end{pmatrix}$ entonces demuestre que

$$\det(A) = \frac{a^5-1}{a-1}$$

[1] Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 60'

Solución

$$\begin{aligned}
\det(A) &= det\begin{pmatrix} 1+a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & 1+a^2 & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & 1+a^3 & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & 1+a^4 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ a & a^2 & a^3 & 1+a^4 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & a^2 & a^3 & 1+a+a^4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a^2 & a^3 & 1+a+a^4 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a^3 & 1+a+a^2+a^4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a^3 & 1+a+a^2+a^4 \end{pmatrix} \\
&= 1+a+a^2+a^3+a^4 = \frac{a^5-1}{a-1}
\end{aligned}$$

(3.a) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A = -A^t$, es decir A es antisimétrica. Demuestre que

$$n \text{ impar } \Longrightarrow A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$$

Solución

$$A = -A^t \Longrightarrow \det(A) = \det(-A^t) \Longrightarrow \det(A) = (-1)^n \det(A^t) \overset{\text{n impar}}{\Longrightarrow} \det(A) = -\det(A) \Longrightarrow \det(A) = 0$$

(3.b) Si $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ tal que $A^2 = A$ entonces determine $\det(A)$

Solución

$$A^2 = A \Longrightarrow \det(A^2) = \det(A) \Longrightarrow (\det(A))^2 = \det(A) \Longrightarrow (\det(A))^2 - \det(A) = 0 \Longrightarrow \det(A)(\det(A)-1) = 0$$

Como, $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ entonces $\det(A) \neq 0$ y luego, $\det(A) = 1$