Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Módulo Básico de Ingeniería

Álgebra II[1] - Una solución del Control N° 1
Profesor Ricardo Santander Baeza
04 de Octubre del 2012

[1] Sea $T : (\mathbb{R}^2, +) \longmapsto (\mathbb{R}_2[x], +)$ tal que $T(a,b) = (a-b) + ax + (a+b)x^2$.

[a] Muestre que T es un homomorfismo de grupos

Solución

Sea $u_1 = (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ y $u_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$\begin{aligned}
T(u_1 + u_2) &= T(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\
&= ((a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) + (a_1 + a_2)x + ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2))x^2 \\
&= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + a_1x + a_2x + (a_1 + b_1)x^2 + (a_2 + b_2)x^2 \\
&= (a_1 - b_1) + a_1x + (a_1 + b_1)x^2 + (a_2 - b_2) + a_2x + (a_2 + b_2)x^2 \\
&= T(a_1, b_1) + T(a_2, b_2) \\
&= T(u_1) + T(u_2)
\end{aligned}$$

Así T es un homomorfismo de grupos

[b] Demuestre que T es inyectivo

Solución: Estudiemos el $\ker(T)$

$$\begin{aligned}
u \in \ker(T) &\iff u \in \mathbb{R}^2 \wedge T(u) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \\
&\iff u = (a.b) \in \mathbb{R}^2 \wedge T(a,b) = 0 + 0x + 0x^2 \\
&\iff u = (a.b) \in \mathbb{R}^2 \wedge (a-b) + ax + (a+b)x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\
&\iff u = (a.b) \in \mathbb{R}^2 \wedge (a-b) = 0 \wedge a = 0 \wedge (a+b) = 0 \\
&\iff u = (a.b) \in \mathbb{R}^2 \wedge a = b = 0 \\
&\iff u = (0,0)
\end{aligned}$$

Así que $\ker(T) = \{(0,0)\}$ y T es inyectiva.

[c] ¿ T es un homomorfismo sobreyectivo?

Solución

Como T es función entonces $\text{Im}\,(T) \subset \mathbb{R}_2[x]$, y entonces T será sobreyectiva si $\mathbb{R}_2[x] \subset \text{Im}\,(T)$. Resolvamos entonces la ecuación $T(a,b) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, para $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ dado.

$$\begin{aligned}
T(a,b) = a_0 + a_1x + a_2x^2 &\iff (a-b) + ax + (a+b)x^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 \\
&\iff \left.\begin{array}{rcl} a-b &=& a_0 \\ a &=& a_1 \\ a+b &=& a_2 \end{array}\right| \\
&\implies a = a_1 \wedge 2a = a_0 + a_2 \\
&\implies a = a_1 \wedge a = \frac{a_0 + a_2}{2}
\end{aligned}$$

Así que, para $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ dado existirá $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(a,b) = p(x)$ si

$$a_1 = \frac{a_0 + a_2}{2} \iff 2a_1 - a_0 - a_2 = 0$$

[1] Cada problema vale 3.0 puntos
Tiempo 80'

así por ejemplo, $p(x) = x \notin$ Im (T). Por tanto T no es sobreyectiva.

[2] Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $T : (M_{\mathbb{R}}(2), +) \longmapsto (\mathbb{R}^4, +)$ es una función definida por: $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, \lambda b + c, d, -c)$ entonces

[a] Muestre que T es un homomorfismo, $(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R})$

Solución

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ p.d.q. T es un homomorfismo

En efecto

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces

$$
\begin{aligned}
T(A+B) &= T\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \\
&= (a_{11}+b_{11}, \lambda(a_{12}+b_{12}) + a_{21}+b_{21}, a_{22}+b_{22}, -(a_{21}+b_{21})) \\
&= (a_{11}+b_{11}, \lambda a_{12} + a_{21} + \lambda b_{12} + b_{21}, a_{22}+b_{22}, -a_{21}-b_{21}) \\
&= (a_{11}, \lambda a_{12} + a_{21}, a_{22}, -a_{21}) + (b_{11}, \lambda b_{12} + b_{21}, b_{22}, -b_{21}) \\
&= T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
&= T(A) + T(B)
\end{aligned}
$$

Luego, T es un homomorfismo de grupo $(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R})$

[b] Determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T \text{ es un homomorfismo sobreyectivo } \}$$

Solución

$$\lambda \in \mathbb{S} \Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ T \text{ es un homomorfismo sobreyectivo}$$

Entonces para $\lambda \in \mathbb{S}$ tenemos que T sobreyectivo e.e. $Img(T) = \mathbb{R}^4$, y como sabemos que $Img(T) \subset \mathbb{R}^4$, sólo nos queda mostrar que tiene solución la ecuación. $T(A) = (x, y, z, t)$, para $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ dado. Así que

$$
\begin{aligned}
T(A) = (x,y,z,t) &\Longleftrightarrow T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (x,y,z,t) \\
&\Longleftrightarrow (a_{11}, \lambda a_{12} + a_{21}, a_{22}, -a_{21}) = (x,y,z,t) \\
&\Longleftrightarrow a_{11} = x \wedge \lambda a_{12} + a_{21} = y \wedge a_{22} = z \wedge -a_{21} = t \\
&\Longleftrightarrow a_{11} = x \wedge \lambda a_{12} - t = y \wedge a_{22} = z \wedge a_{21} = -t \\
&\Longleftrightarrow a_{11} = x \wedge a_{12} = \frac{y+t}{\lambda} \wedge a_{22} = z \wedge a_{21} = -t
\end{aligned}
$$

Luego, $T(A) = (x,y,z,t) \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} x & \dfrac{y+t}{\lambda} \\ -t & z \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \Longleftrightarrow \lambda \neq 0$

Finalmente $\mathbb{S} = \mathbb{R} - \{0\}$