Contenidos

CAPITULO 6

Preliminares sobre Formas

El trabajo solidario es lo único que hace humano al ser humano

El objetivo central de este capitulo es caracterizar cónicas y cuádricas, usando esencialmente técnicas de Algebra Lineal.

1. Formas Lineales

Motivación 1.1. *Consideremos una vez más la situación central del Algebra Lineal, es decir. Dado un $\mathbb{K}$ espacio vectorial V y una base $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V entonces todo vector $v \in V$ puede ser reescrito de forma única com combinación lineal de los elementos de la base α, en símbolos*

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad a_i \in \mathbb{K} \Longleftrightarrow [v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Así que el problema vuelve a ser como determinamos las coordenadas del vector v que nos interesa ubicar, la técnica que introduce un producto interno en V, ya nos dio una respuesta, pero queremos aquí desarrollar una técnica alternativa e independiente de la del producto interno.

Partamos examinando lo básico, siempre da resultado,

$$[v_1]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad [v_2]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots [v_n]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

entonces el lector de coordenadas de los v_i, lee un 1 en la posición i y 0 en las otras posiciones.

En el caso general,

$$[v]_\alpha = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

De (3) vemos que cada $v \in V$ necesita n lectores, pues dicho lector cuando menos debe ser lineal y entregar como valor un escalar, así que la idea ya está.

Definición 1.2. *Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V entonces llamaremos α-lector al conjunto $\alpha^\star = \{v_1^\star, v_2^\star, \dots, v_n^\star\}$, donde para cada $i = 1, 2 \dots, n$*

$$v_i^\star \quad : \quad \begin{array}{rcl} V & \longmapsto & \mathbb{K} \\ v & \longmapsto & a_i \end{array} \Longleftrightarrow [v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

En particular vale siguiente propiedad para los $\alpha - lectores$

$$v_i^\star(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Lema 1.2.1. *Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, $v_i^\star$ es una transformación lineal del espacio vectorial V en su cuerpo de escalares $\mathbb{K}$. En símbolos, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, $v_i^\star \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$, equivalentemente $\alpha^\star \subset \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$*

En efecto

Si $v = \displaystyle\sum_{i=1}^n b_i v_i$ y $u = \displaystyle\sum_{i=1}^n b_i v_i$ entonces

$$v_s^\star(v + u) \quad = \quad v_s^\star \left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) v_i \right] = a_s + b_s = v_s^\star(v) + v_s^\star(u)$$

Análogamente, si $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

$$v_s^\star(\lambda\, v) = v_s^\star \left[\sum_{i=1}^n (\lambda\, a_i) v_i \right] = \lambda\, a_s = \lambda\, v_s^\star(v)$$

Teorema 1.3. *$\alpha^\star$ es una base del espacio vectorial, $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$*

En efecto

- $\alpha^\star$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$

  Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ entonces

$$\begin{array}{lcll} v = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i v_i & \Longrightarrow & T(v) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i T(v_i) & T \text{ es lineal} \\ a_i = v_i^\star(v) & \Longrightarrow & T(v) = \displaystyle\sum_{i=1}^n v_i^\star(v) T(v_i) & \text{ver } (1.2) \end{array}$$

  Así que;

$$T(v) = \sum_{i=1}^n T(v_i) v_i^\star(v) = \left[\sum_{i=1}^n T(v_i) v_i^\star \right](v)$$

  Aplicando la definición de igualdad de funciones tenemos que;

$$T = \sum_{i=1}^n \underbrace{T(v_i)}_{\in \mathbb{K}} v_i^\star$$

  o equivalentemente,

$$T \in \langle \{v_1^\star, v_2^\star, \dots, v_n^\star\} \rangle$$

- $\alpha^\star$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$

  En efecto

  Si suponemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^n r_i v_i^\star = 0$ entonces lo que dices es que, para cada $v\in V$ esa función en v es nula ó $\ker\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n r_i v_i^\star\right) = V$.

  El punto, es como usamos esa información para concluir que los r_j son todos nulos, porque eso es lo que hay que mostrar. Para ello observamos lo siguiente, si esa función anula todo el espacio, en particular anula a los básicos v_j.
  Así que vale para cada $j=1,2,\dots,n$,

$$0 \;=\; \sum_{i=1}^n r_i v_i^\star(v_j) = r_j \qquad\qquad \text{ver (1.2)}$$

Conclusión, $\alpha^\star$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$ y procederemos a darle los nombres que usualmente se usan para estos conceptos.

Definición 1.4. $V^\star = \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$, *se llama "Espacio Dual del espacio vectorial* V*". Si* $\alpha=\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_n\}$ *es una base de vectores de* V *entonces* $\alpha^\star=\{v_1^\star,v_2^\star,\dots,v_n^\star\}$ *se llama " Base Dual " de la base* α.

Conclusión 1.4.1. *Si* V *es un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial y* $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_v\}$ *una base de* V *entonces*

$$v=\sum_{i=1}^n v_i^\star(v)v_i \Longleftrightarrow [v]_\alpha = \begin{pmatrix} v_1^\star(v)\\ v_2^\star(v)\\ \vdots \\ v_n^\star(v)\end{pmatrix} \tag{5}$$

2. Ejercicios Resueltos de espacio dual

(1) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_v\}$ una base de V. Determinemos su base dual $\alpha^\star$.

Etapa 1. Determinamos $[v]_\alpha$, para un $v\in V$, genérico, digamos,

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

Etapa 2. Si Definimos $v_i^\star(v)=a_i$ para $i=1,2,\dots,n$ entonces $\alpha^\star=\{v_1^\star,v_2^\star,\dots,v_n^\star\}$ es la base dual pedida.

(2) Sea $\alpha=\{(1,2),(2,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ entonces usando por ejemplo el producto interno usual de $\mathbb{R}^2$ para encontrar las coordenadas tenemos que;

$$(x,y)=\frac{x+2y}{5}(1,2)+\frac{2x-y}{5}(2,-1)$$

Luego, la base dual $\alpha^\star = \{(1,2)^\star, (2,-1)^\star\}$, se define como en (1), es decir.

$$(1,2)^\star(x,y) = \frac{x+2y}{5} \qquad (2,-1)^\star(x,y) = \frac{2x-y}{5}$$

Observen que, en particular

$$\begin{array}{ll} (1,2)^\star(1,2) = 1 & (1,2)^\star(2,-1) = 0 \\ (2,-1)^\star(1,2) = 0 & (2,-1)^\star(2,-1) = 1 \end{array}$$

(3) Si $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$- espacio vectorial no nulo, y $\phi \in \mathbb{V}^\star$ entonces $\phi = 0$ o ϕ es sobreyectiva.

En efecto

$$(dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1 \Longrightarrow dim_{\mathbb{K}}(Img(\phi)) \leq 1) \Longrightarrow dim_{\mathbb{K}}(Img(\phi) = 0 \quad \vee \quad dim_{\mathbb{K}}(Img(\phi)) = 1$$

Luego tenemos dos casos:

$$dim_{\mathbb{K}}(Img(\phi) = 1 \Longrightarrow dim_{\mathbb{K}}(Img(\phi) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) \Longrightarrow \phi \text{ sobreyectiva}$$

O bien,

$$dim_{\mathbb{K}}(Img(\phi)) = 0 \Longrightarrow dim_{\mathbb{K}}(ker(\phi)) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) \Longrightarrow \phi(v) = 0 \quad (\forall v; v \in \mathbb{V}) \Longrightarrow \phi = 0$$

(4) Dados tres números reales distintos, r_1, r_2 y r_3, podemos definir tres funciones como sigue:

$$\begin{array}{rcccc} T_i & : & \mathbb{R}_2[x] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & & p(x) & \longmapsto & p(r_i) \end{array} \qquad (i = 1,2,3) \tag{6}$$

entonces

- $T_i \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$ para $(i = 1,2,3)$

  En efecto

  Sea $p(x) \in \mathbb{R}_2[x], q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

  En primer lugar, $T_i(p(x) + q(x)) = p(r_i) + q(r_i) = T_i(p(x)) + T_i(q(x))$, y

  En segundo lugar, $T_i(\lambda p(x)) = \lambda p(r_i) = \lambda T_i(p(x))$

  Luego, $T_i \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}) = (\mathbb{R}_2[x])^*$

- $\alpha^\star = \{T_1, T_2, T_3\}$ es un conjunto linealmente independiente en $(\mathbb{R}_2[x])^*$

  En efecto

$$a_1T_1 + a_2T_2 + a_3T_3 = 0 \Longrightarrow (a_1T_1 + a_2T_2 + a_3T_3)(p(x)) = 0 \quad (\forall p(x); p(x) \in \mathbb{R}_2[x])$$

En particular

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl}(a_1T_1 & + & a_2T_2 & + & a_3T_3)(1) & = & 0\\ (a_1T_1 & + & a_2T_2 & + & a_3T_3)(x) & = & 0\\ (a_1T_1 & + & a_2T_2 & + & a_3T_3)(x^2) & = & 0\end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcrcl}a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 0\\ a_1r_1 & + & a_2r_2 & + & a_3r_3 & = & 0\\ a_1r_1^2 & + & a_2r_2^2 & + & a_3r_3^2 & = & 0\end{array}\right|$$

Pero, como

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl}a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 0\\ a_1r_1 & + & a_2r_2 & + & a_3r_3 & = & 0\\ a_1r_1^2 & + & a_2r_2^2 & + & a_3r_3^2 & = & 0\end{array}\right| \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ r_1 & r_2 & r_3\\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Y el determinante de la matriz A es un determinante de Vandermonde entonces

$$\det(A) = (r_1 - r_2)(r_2 - r_3)(r_3 - r_1)$$

Y como por hipótesis los números son distintos entonces $\det(A) \neq 0$ y la solución del sistema es trivial, es decir $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

- $\alpha^\star = \{T_1, T_2, T_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[x])^*$

  En efecto

  $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])^* = dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, así que $\alpha^\star$ es una base de $(\mathbb{R}_2[x])^*$

- Determinemos la correspondiente base α de $\mathbb{R}_2[x]$

  Supongamos que $\alpha = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ es la base buscada, donde:

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{2} c_{i1}x^i \tag{7}$$

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} c_{i2}x^i \tag{8}$$

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{2} c_{i3}x^i \tag{9}$$

entonces por la propia definición de base dual, debemos tener:

Para T_1

$$\begin{array}{rcl}T_1(p_1(x)) & = & 1\\ T_1(p_2(x)) & = & 0\\ T_1(p_3(x)) & = & 0\end{array} \text{ y luego } \begin{array}{rcrcrcl}c_{01} & + & c_{11}r_1 & + & c_{21}r_1^2 & = & 1\\ c_{02} & + & c_{12}r_1 & + & c_{22}r_1^2 & = & 0\\ c_{03} & + & c_{13}r_1 & + & c_{23}r_1^2 & = & 0\end{array}$$

Para T_2

$$\begin{array}{rcl} T_2(p_1(x)) & = & 0 \\ T_2(p_2(x)) & = & 1 \\ T_2(p_3(x)) & = & 0 \end{array} \text{ y luego } \begin{array}{ccccccc} c_{01} & + & c_{11}r_2 & + & c_{21}r_2^2 & = & 0 \\ c_{02} & + & c_{12}r_2 & + & c_{22}r_2^2 & = & 1 \\ c_{03} & + & c_{13}r_2 & + & c_{23}r_2^2 & = & 0 \end{array}$$

Para T_3

$$\begin{array}{rcl} T_3(p_1(x)) & = & 0 \\ T_3(p_2(x)) & = & 0 \\ T_3(p_3(x)) & = & 1 \end{array} \text{ y luego } \begin{array}{ccccccc} c_{01} & + & c_{11}r_3 & + & c_{21}r_3^2 & = & 0 \\ c_{02} & + & c_{12}r_3 & + & c_{22}r_3^2 & = & 0 \\ c_{03} & + & c_{13}r_3 & + & c_{23}r_3^2 & = & 1 \end{array}$$

Así que para cada polinomio tenemos:

Para (8)

$$\left.\begin{array}{ccccccc} c_{01} & + & c_{11}r_1 & + & c_{21}r_1^2 & = & 1 \\ c_{01} & + & c_{11}r_2 & + & c_{21}r_2^2 & = & 0 \\ c_{01} & + & c_{11}r_3 & + & c_{21}r_3^2 & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{ccccc} c_{11}(r_1-r_2) & + & c_{21}(r_1^2-r_2^2) & = & 1 \\ c_{11}(r_2-r_3) & + & c_{21}(r_2^2-r_3^2) & = & 0 \end{array}\right|$$

entonces

$$\left.\begin{array}{ccccc} c_{11} & + & c_{21}(r_1+r_2) & = & \dfrac{1}{r_1-r_2} \\ c_{11} & + & c_{21}(r_2+r_3) & = & 0 \end{array}\right|$$

Luego,

$$c_{21} = \frac{1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}$$

Cálculos analogos permiten mostrar que:

$$\begin{array}{rcl} p_1(x) & = & \dfrac{(x-r_2)(x-r_3)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} \\[2ex] p_2(x) & = & \dfrac{(x-r_1)(x-r_3)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)} \\[2ex] p_3(x) & = & \dfrac{(x-r_1)(x-r_2)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)} \end{array}$$

3. Ejercicios Propuestos de Espacio Dual

(1) Demuestre que V es isomorfo a $V^\star$

(2) Sea $\alpha = \{\underbrace{(1,0,1)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,-2)}_{v_2}, \underbrace{(-1,-1,0)}_{v_3}\} \subset \mathbb{R}^3$.

- Determine $\phi \in (R^3)^*$ tal que

$$\phi(v_1) = 1, \qquad \phi(v_2) = -1 \qquad \phi(v_3) = 3$$

- Determine $\phi \in (R^3)^*$ tal que

$$ker(\phi) = \langle\{v_1, v_2\}\rangle \quad \wedge \quad v_3 \notin ker(\phi)$$

(3) Sea $\alpha = \{v_1, v_2\}$ una base de V y $\beta^\star = \{(v_1+v_2)^\star, (v_1-v_2)^\star\}$.

Demuestre que

$$(v_1+v_2)^\star \neq v_1^\star + v_2^\star$$

(4) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ una base de V y $\beta = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$ tal que $w_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} jv_j$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

(i) Determine $\beta^\star$

(ii) Determine $[v_j^*]_{\beta^\star}$, para $j = 1, 2, \dots, n$

(iii) Determine $[w_j^\star]_\alpha^1$

(5) Sea $\alpha^* = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} \subset (\mathbb{R}_2[x])^*$ tal que para cada elemento

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$$

$$\begin{aligned}
\phi_1(p(x)) &= \textstyle\int_0^1 p(x)\, dx \\
\phi_2(p(x)) &= \textstyle\int_0^2 p(x)\, dx \\
\phi_3(p(x)) &= \textstyle\int_0^{-1} p(x)\, dx
\end{aligned}$$

- Demuestre que α^* es una base de $(\mathbb{R}_2[x])^*$.
- Determine la correspondiente base α de $\mathbb{R}_2[x]$.

4. Preliminares sobre Formas Bilineales

Motivación 4.1. *Sea V un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y supongamos que V, posee un producto interno $\langle,\rangle$ entonces observamos lo siguiente:*

- *El producto interno es una función tal que:*

$$(u,v) \in V \times V \xrightarrow{\langle,\rangle} \langle u,v\rangle \in \mathbb{R}$$

- *Para cada $v \in V$ la función $\langle,v\rangle \in V^\star$, si definimos:*

$$u \in V \xrightarrow{\langle,v\rangle} \langle u,v\rangle \in \mathbb{R}$$

- *Para cada $u \in V$ la función $\langle u,\rangle \in V^\star$, si definimos:*

$$v \in V \xrightarrow{\langle u,\rangle} \langle u,v\rangle \in \mathbb{R}$$

- *Supongamos que* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, *es una base de* V *entonces la linealidad de ambas coordenadas se exprime (o usa) de la siguiente forma para;* $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ *y* $v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$:

$$
\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j \langle v_i, v_j\rangle
\end{aligned}
$$

equivalentemente, si interpretamos $(\langle v_i, v_j\rangle) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} (\langle v_i, v_j\rangle) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
&= [u]^t_\alpha \underbrace{(\langle v_i, v_j\rangle)}_{[\langle , \rangle]^\alpha_\alpha} [v]_\alpha
\end{aligned}
$$

En particular,

(1) *Si* α *es una base ortonormal entonces*

$$
\langle u, v\rangle = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = [u]^t_\alpha \, [v]_\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i
$$

(2) *Si* $u = v$ *y* α *es una base ortonormal entonces*

$$
\langle u, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^2
$$

(3) *En general, si* $[\langle , \rangle]^\alpha_\alpha$ *es diagonalizable y* β *es la base ortonormal de vectores propios de* $\langle , \rangle$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= [u]^t_\alpha \, [I]^\alpha_\beta \underbrace{(\langle v_i, v_j\rangle)}_{[\langle , \rangle]^\beta_\beta} [I]^\beta_\alpha \, [v]_\alpha \\
&= [u]^t_\alpha \, [[I]^\beta_\alpha]^t \underbrace{(\langle v_i, v_j\rangle)}_{[\langle , \rangle]^\beta_\beta} [I]^\beta_\alpha \, [v]_\alpha \\
&= [[I]^\beta_\alpha [u]_\alpha]^t \, \underbrace{(\langle v_i, v_j\rangle)}_{[\langle , \rangle]^\beta_\beta} [I]^\beta_\alpha \, [v]_\alpha \\
&= [u]^t_\beta \, \underbrace{(\langle v_i, v_j\rangle)}_{[\langle , \rangle]^\beta_\beta} [v]_\beta \\
&= [u]^t_\beta \; diag \, \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \, [v]_\beta
\end{aligned}
$$

(4) *En particular, si* $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ *entonces*

$$
\langle u, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u, w_i\rangle^2
$$

Definición 4.2. *Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $B : V \times V \longmapsto \mathbb{K}$ una función tal que $B(u,v) \in \mathbb{K}$ para cada $(u,v) \in V \times V$. Diremos que B es una forma bilineal si B es lineal en cada coordenada, esto es, para cada $v \in V$, $B_v \in V^\star$, donde $B_v(u) = B(u,v)$ y para cada $u \in V$, $B_u \in V^\star$, donde $B_u(v) = B(v,u)$*

Observación 4.2.1. *Antes de dar ningún ejemplo, explicitemos los beneficios por ahora teóricos de la bilinealidad.*

Si $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V entonces para $u = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ y $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$

$$\begin{aligned} B(u,v) &= B\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i b_j B(v_i, v_j) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} B(v_i, v_j) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es decir, tenemos la igualdad fundamental (teoría y práctica)

$$\boxed{B(u,v) = [u]_\alpha^t \underbrace{B(v_i, v_j)}_{[B]_\alpha^\alpha} [v]_\alpha} \tag{10}$$

Esta observación, por una parte, permite hacer la siguiente identificación.

Teorema 4.3. *Si $B(V) = \{$Formas bilineales de $V\}$ y dim $_{\mathbb{K}}(V) = n$ entonces $B(V) \cong \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ (son isomorfos)*

En efecto

Basta definir la siguientes funciones:

$$\begin{array}{ccc} B(V) & \stackrel{\varphi}{\longmapsto} & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n) \\ B & \longmapsto & \varphi(B) \end{array} \tag{11}$$

donde $\varphi(B) = (B(v_i, v_j))$ y $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V, es decir

$$(B(v_i, v_j)) = \begin{pmatrix} B(v_1, v_1) & B(v_1, v_2) & \dots & B(v_1, v_n) \\ B(v_2, v_1) & B(v_2, v_2) & \dots & B(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & B(v_n, v_2) & \dots & B(v_n, v_n) \end{pmatrix} \tag{12}$$

y

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n) & \stackrel{\varphi^{-1}}{\longmapsto} & B(V) \\ A & \longmapsto & \varphi^{-1}(A) \end{array} \tag{13}$$

donde $\varphi^{-1}(A) = B_A$ y $B_A(u,v) = [u]_\alpha^t A [v]_\alpha$

Ahora basta comprobar que

(i) (11) y (13) son funciones inversas
(ii) (11) es una transformación lineal

Por una parte,

$$
\begin{aligned}
\varphi\circ\varphi^{-1}(A) &= \varphi(\varphi^{-1}(A))\\
&= \varphi(B_A)\\
&= B_A(v_i,v_j)\\
&= [v_i]^t_\alpha A[v_j]_\alpha\\
&= A \qquad \text{maravilloso}
\end{aligned}
$$

Por otra,

$$
\begin{aligned}
\varphi^{-1}\circ\varphi(B) &= \varphi^{-1}(\varphi(B))\\
&= \varphi^{-1}(B(v_i,v_j))\\
&= B_{B(v_i,v_j)}
\end{aligned}
$$

Pero,

$$
\begin{aligned}
B_{B(v_i,v_j)}(u,v) &= [u]^t_\alpha B(v_i,v_j)[v]_\alpha\\
&= B(u,v)
\end{aligned}
$$

Así que φ es una biyección.

Finalmente

$$
\begin{aligned}
\varphi(\lambda B_1+B_2) &= [\lambda B_1+B_2](v_i,v_j)\\
&= \lambda B_1(v_1,v_j)+B_2(v_i,v_j)\\
&= \lambda\varphi(B_1)+\varphi(B_2)
\end{aligned}
$$

Es el fin, de la construcción de ejemplos.

Ejemplo 4.3.1. *Sea* $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ *entonces definimos*

$$
\begin{aligned}
B((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \begin{pmatrix}x_1 & y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}x_1+3y_1 & 2x_1+4y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}\\
&= x_1x_2+3y_1x_2+2x_1y_2+4y_1y_2
\end{aligned}
$$

Definición 4.4. *Si* $B\in B(V)$ *y* $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ *es una base de* V *entonces* $[B]^\alpha_\alpha=(B(v_i,v_j))$*, será llamada la matriz de la forma bilineal respecto de la base* α.

Si para alguna base α, $B(v_i,v_j)=B(v_j,v_i)$ *para* $(i=1,\dots,n)$ $(j=1,\dots,n)$ *entonces* $[B]^\alpha_\alpha$ *es una matriz simétrica y recíprocamente si* $[B]^\alpha_\alpha$ *es simétrica para alguna base* α *entonces* $B(u,v)=B(v,u)$ *para* $u\in V$ *y para* $v\in V$. *En tal caso diremos que* B *es una forma bilineal simétrica.*

Ejemplo 4.4.1. *Sea* $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ *entonces en la base canónica tenemos*

$$
\begin{aligned}
B_A((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \begin{pmatrix}x_1 & y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}\\
&= [(x_1,y_1)]^t_{c(2)}\ [A]^{c(2)}_{c(2)}\ [(x_2,y_2)]_{c(2)}
\end{aligned}
$$

En particular,

$$
\begin{aligned}
B_A((x,y),(x,y)) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= [(x,y)]^t_{c(2)}\ [A]^{c(2)}_{c(2)}\ [(x,y)]_{c(2)} \\
&= x^2 + 4xy + 5y^2
\end{aligned}
$$

Si $q(x,y) = B_A((x,y),(x,y))$ *entonces* $q(x,y) = x^2 + 4xy + 5y^2$

Definición 4.5. *Sea* $B \in B(V)$ *tal que* B *es simétrica entonces la función*

$$
\begin{array}{ccc} V & \stackrel{q}{\longmapsto} & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & q(u) \end{array}
$$

tal que $q(u) = B(u,u)$*, será llamada forma cuadrática de* V*, inducida por* B*.*

Teorema 4.5.1. (Forma Normal)
Sea V *un* $\mathbb{R}$ *espacio vectorial con producto interno* $\langle , \rangle$ *y* q *una forma cuadrática sobre* V *entonces existe una base* α *ortonormal de* V *tal que*

$$
\boxed{q(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2, \ \ donde\ [u]_\alpha = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}^t} \tag{14}
$$

En efecto

Consideraremos las siguientes etapas:

(1) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V entonces tenemos para cada $v \in V$, la representación

$$
v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \tag{15}
$$

(2) Como q es una forma cuadrática entonces por definición, $q(v) = B(v,v)$, donde B es la forma bilineal de la cual proviene la forma q. Así que, usando (15) tenemos que

$$
q(v) = [v]^t_\alpha [q]^\alpha_\alpha [v]_\alpha \tag{16}
$$

o equivalentemente

$$
q(v) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(v_1,v_1) & \frac{B(v_1,v_2)}{2} & \dots & \frac{B(v_1,v_n)}{2} \\ \frac{B(v_1,v_2)}{2} & B(v_2,v_2) & \dots & \frac{B(v_2,v_n)}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{B(v_1,v_n)}{2} & \frac{B(v_1,v_n)}{2} & \dots & B(v_n,v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}
$$

(3) Como $[q]^\alpha_\alpha$, es simétrica entonces es diagonalizable y entonces existe una base ortonormal de vectores propios, digamos $\beta = \{w_1, w_2, w_3, w_4, \dots, w_n\}$ tal que $[q]^\beta_\beta = \text{diag}\ \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Así que tenemos la ecuación fundamental

$$
[q]^\alpha_\alpha = [I]^\alpha_\beta [q]^\beta_\beta [I]^\beta_\alpha \tag{17}
$$

(4) Sustituyendo (17) en (16) tenemos que

$$q(v)=[v]_\alpha^t[I]_\beta^\alpha[q]_\beta^\beta[I]_\alpha^\beta[v]_\alpha \tag{18}$$

(5) Ahora el punto es, como las bases son ortonormales entonces tenemos la igualdad

$$[I]_\beta^\alpha=([I]_\alpha^\beta)^{-1}=([I]_\alpha^\beta)^t \tag{19}$$

Aplicando (19) a (18 tenemos

$$\begin{aligned} q(v) &= [v]_\alpha^t([I]_\alpha^\beta)^t[q]_\beta^\beta[I]_\alpha^\beta[v]_\alpha \\ &= ([I]_\alpha^\beta[v]_\alpha)^t[q]_\beta^\beta[I]_\alpha^\beta[v]_\alpha \\ &= [v]_\beta^t[q]_\beta^\beta[v]_\beta \\ &= \big(\langle v,w_1\rangle\ldots\langle v,w_n\rangle\big)\operatorname{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}\begin{pmatrix}\langle v,w_1\rangle\\ \vdots\\ \langle v,w_n\rangle\end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n\lambda_i\langle v,w_i\rangle^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.2. *Si definimos la forma cuadrática $q:\mathbb{R}^2\longmapsto\mathbb{R}$ tal que $q(x,y)=x^2-2xy-y^2$, entonces siguiendo los pasos de la demostración del teorema* (14)

(1) *Expresamos q, en forma matricial:*

$$q(x,y)=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \tag{20}$$

Observemos que, (20) *se escribe en la base canónica que es ortonormal respecto del producto interno usual, como:*

$$q(x,y)=[(x,y)]_{c(2)}^t\quad[q]_{c(2)}^{c(2)}\quad[(x,y)]_{c(2)} \tag{21}$$

(2) *Ahora diagonalizamos $[q]_{c(2)}^{c(2)}$;*

Partimos con el polinomio característico de $[q]_{c(2)}^{c(2)}$

$$\begin{aligned} P_q(\lambda) &= \det\begin{pmatrix}(\lambda-1) & 1\\ 1 & (\lambda+1)\end{pmatrix} \\ &= (\lambda^2-1)-1 \\ &= \lambda^2-2 \end{aligned}$$

Así que los valores propios son; $V.P=\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$.

Seguimos con los subespacios propios de $[q]_{c(2)}^{c(2)}$.

$$
\begin{aligned}
v \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{\lambda} &\iff v \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \wedge [q]_{c(2)}^{c(2)}\, v = \lambda v \\
&\iff v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&\iff v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{array}{rcccl|} x & - & y & = & \lambda x \\ -x & - & y & = & \lambda y \\ \hline \end{array} \qquad (\star)
\end{aligned}
$$

Caso 1. $\lambda = \sqrt{2}$

De $(\star)$ *sigue que:* $\begin{array}{rcccl|} x & - & y & = & \sqrt{2}x \\ -x & - & y & = & \sqrt{2}y \\ \hline \end{array}$. *Así que,* $y = (1-\sqrt{2})x$ *De donde,*

$$
\begin{aligned}
v \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{\sqrt{2}} &\iff v \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \quad \wedge \quad v = \begin{pmatrix} x \\ \\ (1-\sqrt{2})x \end{pmatrix} \\
&\iff v \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \quad \wedge \quad v = x\begin{pmatrix} 1 \\ \\ (1-\sqrt{2}) \end{pmatrix}; \qquad x \in \mathbb{R} \\
&\iff (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{\sqrt{2}} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \\ (1-\sqrt{2}) \end{pmatrix} \right\} \right\rangle
\end{aligned}
$$

Caso 2. $\lambda = -\sqrt{2}$

De $(\star)$ *sigue que:*
$\begin{array}{rcccl|} x & - & y & = & -\sqrt{2}x \\ -x & - & y & = & -\sqrt{2}y \\ \hline \end{array}$. *Así que,* $y = (1+\sqrt{2})x$ *De donde,*

$$
\begin{aligned}
v \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{-\sqrt{2}} &\iff v \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \quad \wedge \quad v = \begin{pmatrix} x \\ \\ (1+\sqrt{2})x \end{pmatrix} \\
&\iff v \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \quad \wedge \quad v = x\begin{pmatrix} 1 \\ \\ (1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}; \qquad x \in \mathbb{R} \\
&\iff (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{-\sqrt{2}} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \\ (1+\sqrt{2}) \end{pmatrix} \right\} \right\rangle
\end{aligned}
$$

(3) *Construimos una base ortonormal de vectores propios, a partir de la base*

$$
\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \\ (1-\sqrt{2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \\ (1+\sqrt{2}) \end{pmatrix} \right\}
$$

Como β es ortogonal entonces ortonormalizamos dividiendo por la norma de cada uno de ellos. Es decir

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \\ \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \right\}$$

(4) *Construimos* $[v]_\alpha$

$$\begin{aligned} v &= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \\ \dfrac{(1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \\ \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4+2\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{(1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \\ \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + \frac{y(1-\sqrt{2})}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \right) \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \\ \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} + \left(\frac{x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} + \frac{y(1+\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \right) \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(5) *Finalmente*

$$q(x,y) = \sqrt{2} \left(\frac{x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + \frac{y(1-\sqrt{2})}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \right)^2 + (-\sqrt{2}) \left(\frac{x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} + \frac{y(1+\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \right)^2$$

5. Clasificación de secciones Cónicas

Lo estudiado en la sección anterior, y en particular la forma normal de una forma cuadrática nos permite dar una nueva mirada a las secciones cónicas y cuádricas, en concordancia con lo dicho entonces iniciamos aclarando que entenderemos por una sección cónica:

Llamaremos sección cónica, al conjunto

$$\boxed{C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}} \tag{22}$$

y, ecuación general de la sección cónica a

$$\boxed{C \ : \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0; \ \{a,b,c,d,e,f\} \subset \mathbb{R}} \tag{23}$$

entonces (30), puede ser reescrita como:

$$\underbrace{ax^2+bxy+cy^2}_{q(x,y)}+\underbrace{dx+ey}_{L(x,y)}+f=0 \tag{24}$$

donde $q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$, es una forma cuadrática y $L(x,y)=dx+ey$ es una forma lineal.
Pasando a su forma matrical tenemos que (30) se reescribe como:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & e\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}+f=0} \tag{25}$$

Aplicamos ahora a (25), el teorema (14) y obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & e\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} \langle v_1,e_1\rangle & \langle v_2,e_1\rangle\\ \langle v_1,e_2\rangle & \langle v_2,e_2\rangle\end{pmatrix}}_{[I]_{\alpha}^{c(2)}}\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\end{pmatrix}+f=0$$

Donde, λ_1 y λ_2, son valores propios de "q", $\alpha=\{v_1,v_2\}\subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1)$ una base ortonormal de vectores propios de q y $\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} \langle v_1,e_1\rangle & \langle v_1,e_2\rangle\\ \langle v_2,e_1\rangle & \langle v_2,e_2\rangle\end{pmatrix}}_{[I]_{c(2)}^{\alpha}}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$.

Así que después de las transformaciones hechas en la ecuación de la sección cónica tenemos la ecuación central

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+Dx_1+Ey_1+f=0 \tag{26}$$

donde $\begin{pmatrix} D & E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & e\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle v_1,e_1\rangle & \langle v_2,e_1\rangle\\ \langle v_1,e_2\rangle & \langle v_2,e_2\rangle\end{pmatrix}$

Caso 1: $\lambda_1\lambda_2\neq 0$

En este caso, completamos cuadrados en (26) para obtener

$$\lambda_1\left(x_1+\frac{D}{2\lambda_1}\right)^2-\frac{D^2}{4\lambda_1}+\lambda_2\left(y_1+\frac{D}{2\lambda_2}\right)^2-\frac{E^2}{4\lambda_2}+f=0 \tag{27}$$

Sea $x_2=x_1+\frac{D}{2\lambda_1}$; $y_2=y_1+\frac{D}{2\lambda_2}$ y $F=f-\frac{D^2}{4\lambda_1}-\frac{E^2}{4\lambda_2}$.

Luego tenemos,

$$\lambda_1x_2^2+\lambda_2y_2^2+F=0 \tag{28}$$

Caso 1.1 $\lambda_1>0$ y $\lambda_2>0$ tenemos los casos posibles

- $F>0$ entonces C : $\emptyset$
- $F=0$ entonces C : $\left(-\frac{D}{2\lambda_1},-\frac{E}{2\lambda_2}\right)$
- $F<0$ entonces C : $\dfrac{x_2^2}{-\frac{F}{\lambda_1}}+\dfrac{y_2^2}{-\frac{E}{\lambda_2}}=1$ es una Elipse.

Caso 1.2 $\lambda_1 > 0$ **y** $\lambda_2 < 0$ tenemos los casos

- $F = 0$ entonces C: $\quad y_2 = \pm\sqrt{-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}}\, x_2$ par de rectas concurrentes.

- $F \neq 0$ entonces C: $\quad \dfrac{x_2^2}{-\frac{F}{\lambda_1}} + \dfrac{y_2^2}{-\frac{E}{\lambda_2}} = 1$ es una hipérbola.

Conclusión 5.1. *Para el caso de valores propios no nulos con producto no nulo tenemos:*

$$\boxed{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} (i)\ \lambda_1\lambda_2 > 0 \Longrightarrow C: \begin{cases} \emptyset \\ Punto \\ Elipse \end{cases} \\ \\ (ii)\ \lambda_1\lambda_2 < 0 \Longrightarrow C: \begin{cases} par\ de\ rectas\ concurrentes \\ Hipérbola \end{cases} \end{cases}}$$

Caso 2: $\lambda_1\lambda_2 = 0$

Caso 2.1 $\lambda_1 = 0$ **y** $\lambda_2 = 0$ en este caso tenemos que

$$Dx_1 + Ey_1 + f = 0 \text{ es una recta}$$

Caso 2.2 $\lambda_1 = 0$ **y** $\lambda_2 \neq 0$

$$\lambda_2\left(y_1 + \frac{E}{2\lambda_2}\right)^2 + Dx_1 - \frac{E^2}{4\lambda_2} + f = 0$$

Si $y_2 = y_1 + \frac{E}{2\lambda_2}$ y $F = f - \frac{E^2}{4\lambda_2}$ entonces

$$\lambda_2 y_2^2 + Dx_1 + F = 0 \text{ parábola o sus degeneraciones}$$

Conclusión 5.2. *Para el caso de valores propios con producto nulo tenemos:*

$$\boxed{\lambda_1\lambda_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C: \begin{cases} Parábola \\ Una\ recta \\ Par\ de\ rectas\ paralelas \\ \emptyset \end{cases}}$$

Observación 5.3. *Sabemos que* $[q]_{c(2)}^{c(2)} = [I]_{\alpha}^{c(2)}\,[q]_{\alpha}^{\alpha}\,[I]_{c(2)}^{\alpha}$ *de donde sigue que* $\det [q]_{c(2)}^{c(2)} = \det [q]_{\alpha}^{\alpha}$ *Es decir,*

$$\lambda_1\lambda_2 = -\frac{b^2-4ac}{4}$$

Teorema 5.4. Clasificación de cónicas vía sus coeficientes *Si C es una sección cónica entonces*

$$\boxed{C: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \Longrightarrow \begin{cases} b^2-4ac>0 \Longrightarrow C: \begin{cases} \text{Hipérbola} \\ \text{Par de rectas} \end{cases} \\ \\ b^2-4ac<0 \Longrightarrow C: \begin{cases} \emptyset \\ \text{Punto} \\ \text{Elipse} \end{cases} \\ \\ b^2-4ac=0 \Longrightarrow C: \begin{cases} \text{Parábola} \\ \text{Una Recta} \\ \emptyset \\ \text{Par de Rectas} \end{cases} \end{cases}}$$

6. Ejercicios Resueltos

Ejemplo 6.1. *Identifiquemos y grafiquemos la sección cónica*

$$C:\ 4x^2+4y^2-8xy+\frac{33}{2}\sqrt{2}\ x-\frac{31}{2}\sqrt{2}\ y+35=0$$

Equivalentemente

$$C:\ 8x^2+8y^2-16xy+33\sqrt{2}\ x-31\sqrt{2}\ y+70=0$$

(1) *Identifiquemos la sección cónica, de acuerdo a nuestro criterio:*

$$b^2-4ac \quad = \quad (-16)^2-4\cdot 8\cdot 8=0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{Parábola} \\ \text{Una Recta} \\ \emptyset \\ \text{Par de Rectas paralelas} \end{cases}$$

(2) *Procedamos ahora a obtener el gráfico de la sección cónica. Para ello consideraremos las etapas siguientes:*

- *Forma matricial de la cónica C*

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 33\sqrt{2} & -31\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 70 = 0$$

- *El polinomio característico* $P_{[q]}(\lambda)$ *de la forma cuadrática* $\mathbf{q}$ *es*

$$P_{[q]}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} (\lambda-8) & -8 \\ -8 & (\lambda-8) \end{pmatrix} = (\lambda-8)^2 - 64$$

Y si hacemos $P_{[q]}(\lambda) = 0$ *para determinar los valores propios entonces obtenemos*

$$\begin{aligned} (\lambda-8)^2 - 64 = 0 &\iff (\lambda-8)^2 = 64 \\ &\iff (\lambda-8) = \pm 8 \\ &\iff \lambda = 8 \pm 8 \\ &\iff \lambda = 16 \vee \lambda = 0 \end{aligned}$$

Así que $V.P. = \{16, 0\}$

- *Con esos valores determinamos los subespacios propios*

Formato general:

$$\begin{aligned} u \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{\lambda} &\iff u \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \wedge [q]u = \lambda u \\ &\iff u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{rcl} 8x - 8y &=& \lambda x \\ -8x + 8y &=& \lambda y \end{array}\right| \qquad (*) \end{aligned}$$

Caso 1. $\lambda = 0$. *De* $(*)$, *sigue que*

$$\begin{aligned} u \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{0} &\iff u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{rcl} 8x - 8y &=& 0x \\ -8x + 8y &=& 0y \end{array}\right| \\ &\Longrightarrow u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge x = y \\ &\Longrightarrow u = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \wedge x \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{0} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

Caso 2. $\lambda = 16$. *De* $(*)$, *sigue que*

$$\begin{aligned} u \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{16} &\iff u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{rcl} 8x - 8y &=& 16x \\ -8x + 8y &=& 16y \end{array}\right| \\ &\Longrightarrow u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge -x = y \\ &\Longrightarrow u = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \wedge x \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{16} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

- *La base ortonormal de vectores propios es*

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

- *Ahora transformamos la cónica a su forma normal. Respecto de la diagonalización de q tenemos que*

$$[q]_{c(2)}^{c(2)} = [I]_{\alpha}^{c(2)}[q]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{c(2)}^{\alpha}$$

Donde,

$$[I]_{\alpha}^{c(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad [q]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \ e \ [I]_{c(2)}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Con la información de $(*)$, la cónica C de:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 33\sqrt{2} & -31\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 70 = 0$$

Se transforma en

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 33\sqrt{2} & -31\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 70 = 0$$

Ahora, respecto del cambio de coordenadas tenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \end{pmatrix}$$

Aplicando las propiedades de trasposición de matrices y las obtenidas anteriormente la cónica se transforma en:

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 33\sqrt{2} & -31\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \end{pmatrix} + 70 = 0$$

Equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) & \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \end{pmatrix} + 70 = 0$$

Multiplicando las matrices obtenemos:

$$16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\right)^2 \quad + \quad 2\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + 64\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) + 70 = 0$$

Procedemos a cambiar variables locales (rotar los ejes):

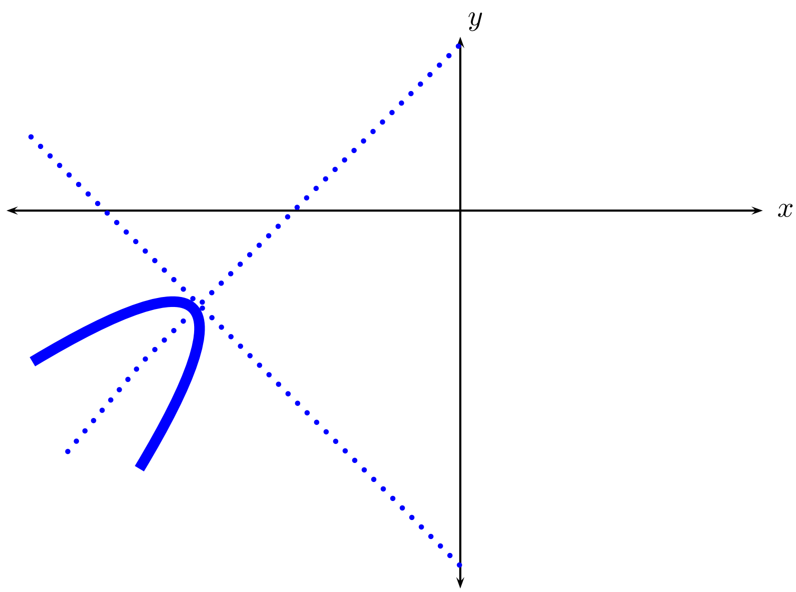
Si llamamos $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$ *e* $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$ *entonces obtenemos la ecuación general de la parábola:*

$$16y_1^2 + 2x_1 + 64y_1 + 70 = 0 \Longleftrightarrow 8y_1^2 + x_1 + 32y_1 + 35 = 0$$

Si completando cuadrados obtenemos que

$$\begin{aligned}
8y_1^2 + x_1 + 32y_1 + 35 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 8y_1^2 + 32y_1 + x_1 + 35 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 8(y_1^2 + 4y_1) + x_1 + 35 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 8(y_1^2 + 4y_1 + 2^2 - 2^2) + x_1 + 35 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 8[(y_1+2)^2 - 4] + x_1 + 35 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 8(y_1+2)^2 - 32 + x_1 + 35 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 8(y_1+2)^2 = -x_1 - 3 \\
&\Longleftrightarrow \quad (y_1+2)^2 = -\frac{1}{8}(x_1+3) \\
&\Longleftrightarrow \quad (y_1-(-2))^2 = -\frac{1}{8}(x_1-(-3))
\end{aligned}$$

- *El diseño de la cónica es de la forma*



Ejemplo 6.2. *Identifiquemos y grafiquemos la sección cónica*

$$C:\ x^2+xy+y^2+2x+4y=0$$

(1) *De acuerdo a nuestros criterios identificamos la sección cónica:*

$$b^2-4ac \ = \ 1-4(1)(1)=-3<0 \Longrightarrow \begin{cases} Elipse \\ Punto \\ \emptyset \end{cases}$$

(2) *Ahora obtengamos el gráfico de la sección cónica*

- *Forma matricial de la cónica* C

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ + \ \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$$

- *Determinamos* $P_{[q]}(\lambda)$ *el polinomio característico de la forma cuadrática* $\mathbf{q}$

$$\begin{aligned} (i) \quad P_q(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda-1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-1)^2-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad (\lambda-1)^2-\frac{1}{4}=0 &\Longrightarrow (\lambda-1)^2=\frac{1}{4} \\ &\Longrightarrow (\lambda-1)=\pm\sqrt{\frac{1}{4}} \\ &\Longrightarrow \lambda=1\pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así que, los valores propios de q son $V.P = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$

- *Determinamos los subespacios propios*

<u>*Formato general:*</u>

$$\begin{aligned}
u \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{\lambda} &\iff u \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \wedge q(u) = \lambda u\\
&\iff u = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \wedge q\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\\
&\iff u = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\\
&\iff u = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{rcrcl} x & + & \frac{1}{2}y & = & \lambda x\\ \frac{1}{2}x & + & y & = & \lambda y\end{array}\right| \qquad (*)
\end{aligned}$$

Caso 1. $\lambda = \dfrac{1}{2}$

De $(*)$*, sigue que*

$$\begin{aligned}
u \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{\frac{1}{2}} &\iff u = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{rcrcl} x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2}x\\ \frac{1}{2}x & + & y & = & \frac{1}{2}y\end{array}\right|\\
&\iff u = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \wedge y = -x
\end{aligned}$$

Luego,

$$(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{\frac{1}{2}} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

Caso 2. $\lambda = \dfrac{3}{2}$

De $(*)$*, sigue que*

$$\begin{aligned}
u \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{\frac{3}{2}} &\iff u = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{rcrcl} x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{3}{2}x\\ \frac{1}{2}x & + & y & = & \frac{3}{2}y\end{array}\right|\\
&\iff u = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \wedge y = x
\end{aligned}$$

Luego,

$$(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{\frac{3}{2}} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

- *La base ortonormal de vectores propios es*

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

- *Transformamos la cónica a su forma normal. Respecto de la diagonalización de q tenemos que*

$$[q]_{c(2)}^{c(2)} = [I]_{\alpha}^{c(2)}[q]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{c(2)}^{\alpha}$$

Donde,

$$[I]_{\alpha}^{c(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad [q]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \ e \ [I]_{c(2)}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Con la información de $(*)$, la cónica C de:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Se transforma en

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Ahora, respecto del cambio de coordenadas tenemos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{pmatrix} \\ &\Updownarrow \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de trasposición de matrices y las obtenidas anteriormente la cónica se transforma en:

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{pmatrix} = 0$$

Equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{2}} & \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=0$$

Multiplicando las matrices obtenemos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{6}{\sqrt{2}}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)=0$$

Procedemos a cambiar variables locales (rotar los ejes):

Si llamamos $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$ *e* $y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$ *entonces obtenemos la ecuación general de la elipse:*

$$C\ :\qquad \frac{1}{2}x_1^2-\frac{2}{\sqrt{2}}\,x_1+\frac{3}{2}y_1^2+\frac{6}{\sqrt{2}}\,y_1=0\quad (\textit{forma normal})$$

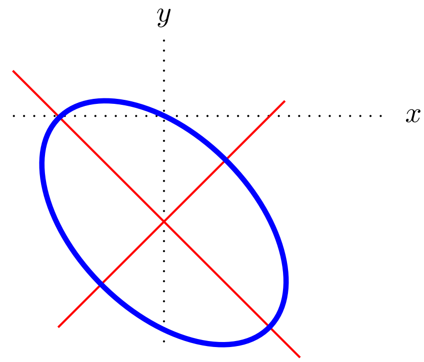
Si completando cuadrados obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x_1^2-\frac{2}{\sqrt{2}}\,x_1+\frac{3}{2}y_1^2+\frac{6}{\sqrt{2}}\,y_1 &= 0\\
\frac{1}{2}\left(x_1^2-\frac{4}{\sqrt{2}}\,x_1\right)+\frac{3}{2}\left(y_1^2+\frac{4}{\sqrt{2}}\,y_1\right) &= 0\\
\left(x_1^2-\frac{4}{\sqrt{2}}\,x_1+\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2\right)+ &\\
3\left(y_1^2+\frac{4}{\sqrt{2}}\,y_1+\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2\right) &= 0\\
\left(x_1-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2-2+3\left(y_1+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2-6 &= 0\\
\left(x_1-\sqrt{2}\right)^2+3\left(y_1+\sqrt{2}\right)^2 &= 8
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación canónica de la elipse es:

$$\frac{\left(x_1-\sqrt{2}\right)^2}{8}+\frac{\left(y_1-(-\sqrt{2})\right)^2}{\frac{8}{3}}\ =\ 1$$

- *El diseño de la cónica es de la forma*



7. Ejercicios Propuestos

(1) En los siguientes ejercicios identifique la sección cónica

(a) $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$

(b) $x^2 - 2y = 0$

(c) $25y^2 - 4x^2 = 100$

(d) $4x^2 + 4y^2 - 9 = 0$

(e) $-25x^2 + 9y^2 + 225 = 0$

(2) Identifique la cónica, escriba esta en forma canónica y grafique:

(a) $x^2 + xy + y^2 = 6$

(b) $xy = 1$

(c) $9x^2 + y^2 + 6xy = 4$

(d) $4x^2 + 4y^2 - 10xy = 0$

(e) $9x^2 + 6y^2 + 4xy - 5 = 0$

(f) $9x^2 + y^2 + 6xy - 10\sqrt{10}\, x + 10\sqrt{10}\, y + 90 = 0$

(g) $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 30\sqrt{2}\, x + 18\sqrt{2}\, y + 82 = 0$

(h) $5x^2 + 12xy - 2\sqrt{13}\, x = 36$

(i) $8x^2 + 8y^2 - 16xy + 33\sqrt{2}\, x - 31\sqrt{2}\, y + 70 = 0$

8. Clasificación de Superficies Cuádricas

Lo estudiado en la sección anterior, y en particular la forma normal de una forma cuadrática nos permite dar una nueva mirada a las superficies cuádricas, en concordancia con lo dicho entonces iniciamos aclarando que entenderemos por una superficie cuádrica:

En primer lugar, si $q:\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$ es una forma cuadrática entonces debe ser de la forma

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e\\ d & b & f\\ e & f & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} ax+dy+ez & dx+by+fz & ex+fy+cz \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\ &= ax^2+dyx+ezx+dxy+by^2+fzy+exz+fyz+cz^2\\ &= ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz \end{aligned}$$

Definición 8.1. *Llamaremos superficie cuádrica , al conjunto*

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j=0\} \tag{29}$$

Y, ecuación general de la cuádrica a

$$C: ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j=0; \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}\subset\mathbb{R} \tag{30}$$

Ejemplo 8.1.1. *C:* $x^2+y^2-z^2-2x-4y-4z+1=0$

Teorema 8.2. *Si* $C:\quad ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j=0;\ \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}\subset\mathbb{R}$ *entonces existe una base ortonormal de* $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$ *tal que la cuádrica se transforma en*

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+\lambda_3z_1^2+Gx_1+Hy_1+Iz_1+j=0;\ \{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,G,H,I,j\}\subset\mathbb{R} \tag{31}$$

En efecto, si consideramos una cuádrica C: $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j=0$ entonces para analizarla, consideraremos las siguientes etapas.

(1) Notación matricial de C.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e\\ d & b & f\\ e & f & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+j=0$$

(2) Diagonalizamos la forma cuadrática $q(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$

Conforme a la forma normal obtenida en (14) existe una base ortonormal α de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$ de vectores propios tal que

$$[q]_{c(3)}^{c(3)} = [I]_{\alpha}^{c(3)}[q]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{c(3)}^{\alpha}$$

Donde

$$[q]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

La situación explícita, es de la siguiente forma: Si $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $c(3) = \{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de α de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ entonces

(a) Las matrices cambio de coordenadas son:

- $[I]_{\alpha}^{c(3)} = \begin{pmatrix} \langle v_1, e_1\rangle & \langle v_2, e_1\rangle & \langle v_3, e_1\rangle \\ \langle v_1, e_2\rangle & \langle v_2, e_2\rangle & \langle v_3, e_2\rangle \\ \langle v_1, e_3\rangle & \langle v_2, e_3\rangle & \langle v_3, e_3\rangle \end{pmatrix}$

- $[I]_{c(3)}^{\alpha} = ([I]_{\alpha}^{c(3)})^t = \begin{pmatrix} \langle v_1, e_1\rangle & \langle v_1, e_2\rangle & \langle v_1, e_3\rangle \\ \langle v_2, e_1\rangle & \langle v_2, e_2\rangle & \langle v_2, e_3\rangle \\ \langle v_3, e_1\rangle & \langle v_3, e_2\rangle & \langle v_3, e_3\rangle \end{pmatrix}$

(b) Los cambios de coordenadas son:

- $[I]_{c(3)}^{\alpha} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_{c(3)} = \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_{\alpha} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \langle v_1, e_1\rangle & \langle v_1, e_2\rangle & \langle v_1, e_3\rangle \\ \langle v_2, e_1\rangle & \langle v_2, e_2\rangle & \langle v_2, e_3\rangle \\ \langle v_3, e_1\rangle & \langle v_3, e_2\rangle & \langle v_3, e_3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

- $[I]_{\alpha}^{c(3)} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_{\alpha} = \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_{c(3)} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \langle v_1, e_1\rangle & \langle v_2, e_1\rangle & \langle v_3, e_1\rangle \\ \langle v_1, e_2\rangle & \langle v_2, e_2\rangle & \langle v_3, e_2\rangle \\ \langle v_1, e_3\rangle & \langle v_2, e_3\rangle & \langle v_3, e_3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(c) Finalmente la transformación matricial es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v_1, e_1\rangle & \langle v_2, e_1\rangle & \langle v_3, e_1\rangle \\ \langle v_1, e_2\rangle & \langle v_2, e_2\rangle & \langle v_3, e_2\rangle \\ \langle v_1, e_3\rangle & \langle v_2, e_3\rangle & \langle v_3, e_3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, e_1\rangle & \langle v_1, e_2\rangle & \langle v_1, e_3\rangle \\ \langle v_2, e_1\rangle & \langle v_2, e_2\rangle & \langle v_2, e_3\rangle \\ \langle v_3, e_1\rangle & \langle v_3, e_2\rangle & \langle v_3, e_3\rangle \end{pmatrix}$$

(3) Ahora procedemos a reescribir la forma en las nuevas coordenadas, es decir:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + j = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, e_1\rangle & \langle v_2, e_1\rangle & \langle v_3, e_1\rangle \\ \langle v_1, e_2\rangle & \langle v_2, e_2\rangle & \langle v_3, e_2\rangle \\ \langle v_1, e_3\rangle & \langle v_2, e_3\rangle & \langle v_3, e_3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, e_1\rangle & \langle v_1, e_2\rangle & \langle v_1, e_3\rangle \\ \langle v_2, e_1\rangle & \langle v_2, e_2\rangle & \langle v_2, e_3\rangle \\ \langle v_3, e_1\rangle & \langle v_3, e_2\rangle & \langle v_3, e_3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, e_1\rangle & \langle v_2, e_1\rangle & \langle v_3, e_1\rangle \\ \langle v_1, e_2\rangle & \langle v_2, e_2\rangle & \langle v_3, e_2\rangle \\ \langle v_1, e_3\rangle & \langle v_2, e_3\rangle & \langle v_3, e_3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + j = 0$$

O sea que

$$
\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e\\ d & b & f\\ e & f & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+j=0 \Longleftrightarrow
$$

$$
\left(\begin{pmatrix} \langle v_1,e_1\rangle & \langle v_1,e_2\rangle & \langle v_1,e_3\rangle\\ \langle v_2,e_1\rangle & \langle v_2,e_2\rangle & \langle v_2,e_3\rangle\\ \langle v_3,e_1\rangle & \langle v_3,e_2\rangle & \langle v_3,e_3\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right)^t\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle v_1,e_1\rangle & \langle v_1,e_2\rangle & \langle v_1,e_3\rangle\\ \langle v_2,e_1\rangle & \langle v_2,e_2\rangle & \langle v_2,e_3\rangle\\ \langle v_3,e_1\rangle & \langle v_3,e_2\rangle & \langle v_3,e_3\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+
$$

$$
\begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle v_1,e_1\rangle & \langle v_2,e_1\rangle & \langle v_3,e_1\rangle\\ \langle v_1,e_2\rangle & \langle v_2,e_2\rangle & \langle v_3,e_2\rangle\\ \langle v_1,e_3\rangle & \langle v_2,e_3\rangle & \langle v_3,e_3\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}+j=0
$$

(4) Por tanto se obtiene

$$
\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} G & H & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}+j=0
$$

Donde,

$$
\begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle v_1,e_1\rangle & \langle v_2,e_1\rangle & \langle v_3,e_1\rangle\\ \langle v_1,e_2\rangle & \langle v_2,e_2\rangle & \langle v_3,e_2\rangle\\ \langle v_1,e_3\rangle & \langle v_2,e_3\rangle & \langle v_3,e_3\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} G & H & I \end{pmatrix}
$$

(5) Finalmente tenemos que

$$
\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 y_1^2+\lambda_3 z_1^2+Gx_1+Hy_1+Iz_1+j=0
$$

Observación 8.2.1. *Ahora a la luz de* (31) *procedemos a analizar el comportamiento de los valores propios.*

(1) *Si* $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\neq 0$ *entonces* $\lambda_i\neq 0$ *para* $i=1,2,3$ *así que podemos completar los cuadrados como sigue*

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+\lambda_3z_1^2+Gx_1+Hy_1+Iz_1+j=0 \Longleftrightarrow$$

$$(\lambda_1x_1^2+Gx_1)+(\lambda_2y_1^2+Hy_1)+(\lambda_3z_1^2+Iz_1)+j=0 \Longleftrightarrow$$

$$\lambda_1\left(x_1^2+\frac{G}{\lambda_1}x_1\right)+\lambda_2\left(y_1^2+\frac{H}{\lambda_2}y_1\right)+\lambda_3\left(z_1^2+\frac{I}{\lambda_3}z_1\right)+j=0 \Longleftrightarrow$$

$$\lambda_1\left(x_1^2+\frac{G}{\lambda_1}x_1+\left(\frac{G}{2\lambda_1}\right)^2-\left(\frac{G}{2\lambda_1}\right)^2\right)+\lambda_2\left(y_1^2+\frac{H}{\lambda_2}y_1+\left(\frac{H}{2\lambda_2}\right)^2-\left(\frac{H}{2\lambda_2}\right)^2\right)+$$

$$\lambda_3\left(z_1^2+\frac{I}{\lambda_3}z_1+\left(\frac{I}{2\lambda_3}\right)^2-\left(\frac{I}{2\lambda_3}\right)^2\right)+j=0 \Longleftrightarrow$$

$$\lambda_1\left(\left(x_1+\frac{G}{2\lambda_1}\right)^2-\left(\frac{G^2}{4\lambda_1^2}\right)\right)+\lambda_2\left(\left(y_1+\frac{H}{2\lambda_2}\right)^2-\left(\frac{H^2}{4\lambda_2^2}\right)\right)+$$

$$\lambda_3\left(\left(z_1+\frac{I}{2\lambda_3}\right)^2-\left(\frac{I^2}{4\lambda_3^2}\right)\right)+j=0 \Longleftrightarrow$$

$$\lambda_1\left(x_1+\frac{G}{2\lambda_1}\right)^2-\left(\frac{G^2}{4\lambda_1}\right)+\lambda_2\left(y_1+\frac{H}{2\lambda_2}\right)^2-\left(\frac{H^2}{4\lambda_2}\right)+\lambda_3\left(z_1+\frac{I}{2\lambda_3}\right)^2-\left(\frac{I^2}{4\lambda_3}\right)+j=0 \Longleftrightarrow$$

$$\lambda_1\left(x_1+\frac{G}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y_1+\frac{H}{2\lambda_2}\right)^2+\lambda_3\left(z_1+\frac{I}{2\lambda_3}\right)^2-\left(\frac{G^2}{4\lambda_1}\right)-\left(\frac{H^2}{4\lambda_2}\right)-\left(\frac{I^2}{4\lambda_3}\right)+j=0$$

Si hacemos $x_2=\left(x_1+\dfrac{G}{2\lambda_1}\right)$, $y_2=\left(y_1+\dfrac{H}{2\lambda_2}\right)$, $z_2=\left(z_1+\dfrac{I}{2\lambda_3}\right)$ *y* $J=j-\left(\dfrac{G^2}{4\lambda_1}\right)-\left(\dfrac{H^2}{4\lambda_2}\right)-\left(\dfrac{I^2}{4\lambda_3}\right)$ *entonces la cuádrica se transforma en*

$$\lambda_1x_2^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3z_2^2+J=0 \tag{32}$$

(a) *Si* ($\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3>0 \quad \wedge \quad \lambda_1>0\wedge\lambda_2>0\wedge\lambda_3>0$) *entonces de la relación* (32) *tenemos las siguientes posibilidades*

- $J=0 \Longrightarrow \lambda_1x_2^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3z_2^2=0 \Longrightarrow x_2=y_2=z_2=0$. *Así que*

$$C\ :\ =\ \left\{\left(-\frac{G}{2\lambda_1},-\frac{H}{2\lambda_2},-\frac{I}{2\lambda_1}\right)\right\}$$

- $J>0 \Longrightarrow \lambda_1x_2^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3z_2^2<0$ ($\Rightarrow\Leftarrow$). *Así que*

$$C\ =\emptyset$$

- $J<0 \Longrightarrow \lambda_1x_2^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3z_2^2=-J$. *Así que*

$$C: \qquad \frac{x_2^2}{\frac{-J}{\lambda_1}} + \frac{y_2^2}{\frac{-J}{\lambda_2}} + \frac{z_2^2}{\frac{-J}{\lambda_3}} = 1 \qquad \textit{Es un Elipsoide}$$

(b) *Si* $(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0 \quad \wedge \quad \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 < 0 \wedge \lambda_3 > 0)$ *entonces de la relación* (32) *tenemos las siguientes posibilidades*

- $J = 0 \Longrightarrow \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 = 0 \Longrightarrow \frac{x_2^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{y_2^2}{\frac{1}{\lambda_2}} + \frac{z_2^2}{\frac{1}{\lambda_3}} = 0$

- *Si* $J \neq 0 \Longrightarrow \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 = -J$ *entonces*

  - *Para* $J > 0$, *tenemos que la cuádrica es*

$$C: \qquad \frac{x_2^2}{\frac{-J}{\lambda_1}} + \frac{y_2^2}{\frac{-J}{\lambda_2}} + \frac{z_2^2}{\frac{-J}{\lambda_3}} = 1 \quad \textit{Un Hiperboloide de una hoja}$$

  - *Para* $J < 0$, *tenemos que la cuádrica es*

$$C: \qquad \frac{x_2^2}{\frac{-J}{\lambda_1}} + \frac{y_2^2}{\frac{-J}{\lambda_2}} + \frac{z_2^2}{\frac{-J}{\lambda_3}} = 1 \quad \textit{Un Hiperboloide de dos hojas}$$

(c) *Si* $(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0 \quad \wedge \quad \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 < 0 \wedge \lambda_3 < 0)$ *entonces de la relación* (32) *tenemos las siguientes posibilidades*

- $J = 0 \Longrightarrow \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 = 0 \Longrightarrow x_2 = y_2 = z_2 = 0$. *Así que*

$$C \;:\; = \quad \left\{\left(-\frac{G}{2\lambda_1}, -\frac{H}{2\lambda_2}, -\frac{I}{2\lambda_1}\right)\right\}$$

- $J < 0 \Longrightarrow \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 > 0$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$. *Así que*

$$C \;= \emptyset$$

- $J > 0 \Longrightarrow \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 = -J$. *Así que*

$$C: \qquad \frac{x_2^2}{\frac{-J}{\lambda_1}} + \frac{y_2^2}{\frac{-J}{\lambda_2}} + \frac{z_2^2}{\frac{-J}{\lambda_3}} = 1 \qquad \textit{Es un Elipsoide}$$

(d) *Si* $(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0 \quad \wedge \quad \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0 \wedge \lambda_3 > 0)$ *entonces de la relación* (32) *tenemos las siguientes posibilidades*

- $J = 0 \Longrightarrow \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 = 0 \Longrightarrow \frac{x_2^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{y_2^2}{\frac{1}{\lambda_2}} + \frac{z_2^2}{\frac{1}{\lambda_3}} = 0$

- *Si* $J \neq 0 \Longrightarrow \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 = -J$ *entonces*

- *Para* $J > 0$, *tenemos que la cuádrica es*

$$C: \qquad \frac{x_2^2}{\frac{-J}{\lambda_1}} + \frac{y_2^2}{\frac{-J}{\lambda_2}} + \frac{z_2^2}{\frac{-J}{\lambda_3}} = 1 \quad \textit{Un Hiperboloide de dos hojas}$$

- *Para* $J < 0$, *tenemos que la cuádrica es*

$$C: \qquad \frac{x_2^2}{\frac{-J}{\lambda_1}} + \frac{y_2^2}{\frac{-J}{\lambda_2}} + \frac{z_2^2}{\frac{-J}{\lambda_3}} = 1 \quad \textit{Un Hiperboloide de una hoja}$$

(2) *Si* $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0$ *entonces conforme a la ecuación* (31), *tenemos las siguientes alternativas:*

(a) *Si* $\lambda_i = 0$ *para* $i = 1, 2, 3$ *entonces la cuádrica es un plano:*

$$Gx_1 + Hy_1 + Iz_1 + j = 0$$

(b) *Si* $\lambda_1 \neq 0$ *y* $\lambda_2 \neq 0$ *entonces tenemos que la cuádrica adopta la forma:*

$$\begin{aligned}
\lambda_1\left(x_1 + \frac{G}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 + \frac{H}{2\lambda_2}\right)^2 - \left(\frac{G^2}{4\lambda_1}\right) - \left(\frac{H^2}{4\lambda_2}\right) + Iz_1 + j = 0 &\Longleftrightarrow \\
\lambda_1\left(x_1 + \frac{G}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 + \frac{H}{2\lambda_2}\right)^2 + Iz_1 + \underbrace{j - \left(\frac{G^2}{4\lambda_1}\right) - \left(\frac{H^2}{4\lambda_2}\right)}_{J} = 0 &\Longleftrightarrow \\
\lambda_1\left(x_1 + \frac{G}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 + \frac{H}{2\lambda_2}\right)^2 + I\left(z_1 + \frac{J}{I}\right) = 0 &\Longleftrightarrow \\
\frac{\left(x_1 + \frac{G}{2\lambda_1}\right)^2}{\frac{I}{\lambda_1}} + \frac{\left(y_1 + \frac{H}{2\lambda_2}\right)^2}{\frac{I}{\lambda_2}} + \left(z_1 + \frac{J}{I}\right) &= 0
\end{aligned}$$

En este caso, si hacemos $X = x_1 + \dfrac{G}{2\lambda_1}$, $Y = y_1 + \dfrac{H}{2\lambda_2}$ *y* $Z = z_1 + \dfrac{J}{I}$ *entonces*

$$\frac{X^2}{\frac{I}{\lambda_1}} + \frac{Y^2}{\frac{I}{\lambda_2}} + Z = 0 \tag{33}$$

Si $\lambda_1 > 0$ *y* $\lambda_2 > 0$ *entonces* (33) *es un Paraboloide Elíptico.*

Si $\lambda_1 > 0$ *y* $\lambda_2 < 0$ *entonces* (33) *es un Paraboloide Hiperbólico.*

Ejemplo 8.2.2. *Clasifiquemos la cuádrica C:* $2x^2+4y^2-4z^2+6yz-5x+3y=2$ *entonces procedemos como sigue:*

(1) *La notación matricial de C es la siguiente:*

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=2$$

(2) *diagonalizamos la forma cuadrática* $[q]_{c(3)}^{c(3)}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 3 & -4\end{pmatrix}$

(a) *Su polinomio característico es de la forma*

$$P_q(\lambda)=\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-4 & -3\\ 0 & -3 & \lambda+4\end{pmatrix}=(\lambda-2)((\lambda-4)(\lambda+4)-9)=(\lambda-2)(\lambda^2-25)$$

Luego, los valores propios son

$$V.P=\{5,2,-5\}$$

(b) *Para determinar los subespacios propios hacemos los siguiente:*

$$\begin{aligned} u\in(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_\lambda &\iff u\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)\wedge[q]_{c(3)}^{c(3)}u=\lambda u\\ &\iff u=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\ &\iff u=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\wedge\begin{array}{rcl|} 2x &=& \lambda x\\ 4y+3z &=& \lambda y\\ 3y-4z &=& \lambda z\\ \hline\end{array} \qquad (*)\end{aligned}$$

(i) *Si* $\lambda=5$ *entonces sustituyendo en* $*$ *tenemos que*

$$\begin{aligned} u\in(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_5 &\iff u=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\wedge\begin{array}{rcl|} 2x &=& 5x\\ 4y+3z &=& 5y\\ 3y-4z &=& 5z\\ \hline\end{array}\\ &\Longrightarrow u=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\wedge x=0\wedge y=3z\\ &\Longrightarrow u=z\begin{pmatrix} 0\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\wedge z\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Así que

$$(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_5 = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 0\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

(ii) *Si* $\lambda = 2$ *entonces sustituyendo en* $*$ *tenemos que*

$$\begin{aligned}
u \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{rcl} 2x & = & 2x \\ 4y+3z & = & 2y \\ 3y-4z & = & 2z \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge y = 0 \wedge z = 0 \\
&\Longrightarrow \quad u = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Así que

$$(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_2 \quad = \quad \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

(iii) *Si* $\lambda = -5$ *entonces sustituyendo en* $*$ *tenemos que*

$$\begin{aligned}
u \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_5 \quad &\Longleftrightarrow \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{rcl} 2x & = & -5x \\ 4y+3z & = & -5y \\ 3y-4z & = & -5z \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge x = 0 \wedge z = -3y \\
&\Longrightarrow \quad u = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge y \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Así que

$$(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_5 \quad = \quad \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Luego una base de vectores propios ortogonales es

$$\alpha \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora Ortonormalizamos α *y obtenemos*

$$\beta \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{10}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

(3) *Así que, las matrices cambio de base son*

$$[I]_{\beta}^{c(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \quad \wedge \quad [I]_{c(3)}^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$[I]_{c(3)}^{\beta}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3y+z}{\sqrt{10}} \\ x \\ \frac{y-3z}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

(4) *Ahora cambiamos coordenadas en la cuádrica original.*

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2$$

Es decir sustituyendo obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3y+z}{\sqrt{10}} & x & \frac{y-3z}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3y+z}{\sqrt{10}} \\ x \\ \frac{y-3z}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3y+z}{\sqrt{10}} \\ x \\ \frac{y-3z}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3y+z}{\sqrt{10}} & x & \frac{y-3z}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3y+z}{\sqrt{10}} \\ x \\ \frac{y-3z}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{10}} & -5 & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3y+z}{\sqrt{10}} \\ x \\ \frac{y-3z}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow$$

$$5\left(\frac{3y+z}{\sqrt{10}}\right)^2 + 2x^2 - 5\left(\frac{y-3z}{\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{9}{\sqrt{10}}\left(\frac{3y+z}{\sqrt{10}}\right) - 5x + \frac{3}{\sqrt{10}}\left(\frac{y-3z}{\sqrt{10}}\right) = 2$$

Así que si hacemos

$$X = x \quad \wedge \quad Y = \frac{3y+z}{\sqrt{10}} \quad \wedge \quad Z = \frac{y-3z}{\sqrt{10}}$$

Obtenemos la Cuádrica

$$5Y^2 + 2X^2 - 5Z^2 + \frac{9}{\sqrt{10}}\, Y - 5X + \frac{3}{\sqrt{10}}\, Z = 2$$

Y completando los cuadrados obtendremos lo siguiente:

$$5\left(Y + \frac{9}{10\sqrt{10}}\right)^2 + 2\left(X - \frac{5}{4}\right)^2 - 5\left(Z - \frac{3}{10\sqrt{10}}\right)^2 = 2 + \frac{72}{200} + \frac{25}{8}$$

Luego, la cuádrica se transforma en

$$\frac{\left(Y+\dfrac{9}{10\sqrt{10}}\right)^2}{\dfrac{5.485}{5}}+\frac{\left(X-\dfrac{5}{4}\right)^2}{\dfrac{5.485}{2}}-\frac{\left(Z-\dfrac{3}{10\sqrt{10}}\right)^2}{\dfrac{5.485}{5}}=1$$

Y es un hiperboloide de una hoja.

Bibliografía

[1] Bello, I. “Álgebra Elemental ”, Brooks/Cole Publishing Company 1999.

[2] Bobadilla, G. Labarca R. “Cálculo 1 ”, Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago 2007.

[3] Boldrini, J. Rodriguez, S. Figueiredo, V. Wetzler, H. “Álgebra Linear”, Editora Harper & Row do Brasisl Ltda, 1984.

[4] Fraleigh J. “Álgebra Abstracta ”Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

[5] Grimaldi, R. “Matemáticas Discretas y Combinatorias ”, Addison Wesley 1997.

[6] Gustafson, R. “Álgebra Intermedia ”, Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[7] Kaufmann, J. “Álgebra Intermedia ”, Brooks/Cole Publishing Company 2000

[8] Santander, R. “Álgebra Elemental y superior”, Universidad de Santiago 2004

[9] Santander, R. “Álgebra Lineal”, Universidad de Santiago 2004

[10] Santander, R. “Un Segundo curso de Algebra Lineal”

[11] Swokowski, E. “Álgebra y trigonometría ”, Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[12] Zill, D. ” Álgebra y trigonometría ”, Mc Graw Hill 1999

Indice Alfabético