Contenidos

CAPITULO 5

Diagonalización de operadores

El trabajo solidario es lo único que hace humano al ser humano

Este capitulo esta destinado a estudiar esencialmente las relaciones que existen entre los isomorfismos y las representaciones a través de matrices diagonales. Las competencias que adquirirá el alumno después de interactuar con esta información, se resumen en los siguientes procesos:

- Verificar a través de un cálculo directo, si una transformación de un espacio en si mismo (operador), puede o no representarse a través de una matriz diagonal.
- Concluir si un operador que se representa a través de una matriz diagonal es o no un isomorfismo.
- Determinar la existencia o la no existencia de una base que permita representar a un operador a través de una matriz diagonal.

1. Revisión de la Información y Planteamiento Del Problema

(1) Para fijar ideas diremos que una transformación lineal T. Será llamada un operador lineal en un $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$ si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$.

(2) Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$, y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ entonces para cada base α de $\mathbb{V}$ tenemos la representación matricial $[T]_{\alpha}^{\alpha} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ de T.

(3) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ isomorfismo si y sólo si $\det[T]_{\alpha}^{\alpha} \neq 0$

(4) En particular, si $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ es una matriz diagonal, es decir,

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces T isomorfismo si y sólo si $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$

(5) ¿Bajo que condiciones existe una tal base α de $\mathbb{V}$ que representa en forma diagonal a un operador T?

2. Estudio Preliminar Del Proceso De diagonalización

Motivación 2.1. *Supongamos que para un $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión $n \in \mathbb{N}$, y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ existe una base $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tal que $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ es una matriz diagonal*

(1) *Por construcción tenemos que:*

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = ([T(v_1)]_{\alpha}\ [T(v_2)]_{\alpha}\ [T(v_3)]_{\alpha}\ \cdots\ [T(v_n)]_{\alpha}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Así que,

$$\begin{array}{ccccccccccc} T(v_1) & = & a_{11}v_1 & + & 0v_2 & + & 0v_3 & + & \cdots & 0v_n & = & a_{11}v_1 \\ T(v_2) & = & 0v_1 & + & a_{22}v_2 & + & 0v_3 & + & \cdots & 0v_n & = & a_{22}v_2 \\ T(v_2) & = & 0v_1 & + & 0v_2 & + & a_{33}v_3 & + & \cdots & 0v_n & = & a_{33}v_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T(v_n) & = & 0v_1 & + & 0v_2 & + & a_{33}v_3 & + & \cdots & a_{nn}v_n & = & a_{nn}v_n \end{array}$$

(2) *Es claro que si una tal base existe, debe satisfacer la propiedad*

$$T(v_i) = a_{ii}v_i \quad (\text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n)$$

Así que la vía para encontrar una tal base α, es estudiar este tipo de comportamiento, es decir estudiar la solución en $\mathbb{V}$ de una ecuación del tipo

$$T(v) \;=\; \lambda v \quad (\text{Para cada } \lambda \in \mathbb{K})$$

Observación 2.2. *Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, y consideremos la ecuación $T(v) = \lambda v$, para algún $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces*

- *Si $v = 0_{\mathbb{V}}$ entonces como $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{V}}$, λ puede ser cualquier escalar.*

- *Si $v \neq 0_{\mathbb{V}}$ entonces podemos analizar esta situación*

$$\begin{array}{rcll} T(v) = \lambda v & \Longleftrightarrow & \lambda v - T(v) = 0_{\mathbb{V}} & \\ & \Longleftrightarrow & \lambda 1_{\mathbb{V}}(v) - T(v) = 0_{\mathbb{V}} & (1_{\mathbb{V}} \text{ es el operador identidad}) \\ & \Longleftrightarrow & (\lambda 1_{\mathbb{V}} - T)(v) = 0_{\mathbb{V}} & \\ & \Longleftrightarrow & v \in \ker(\lambda 1_{\mathbb{V}} - T) & ((\lambda 1_{\mathbb{V}} - T), \text{ es un operador lineal}) \\ & \Longleftrightarrow & \dim_{\mathbb{K}} \ker(\lambda 1_{\mathbb{V}} - T) \geq 1 & (v \neq 0_{\mathbb{V}}) \\ & \Longleftrightarrow & \ker(\lambda 1_{\mathbb{V}} - T)) \neq 0_{\mathbb{V}} & (\text{ No inyectiva}) \\ & \Longleftrightarrow & \det([\lambda 1_{\mathbb{V}} - T]_{\alpha}^{\alpha}) = 0_{\mathbb{V}} & (\text{Para cualquier base } \alpha \text{ de } \mathbb{V}) \qquad (\star) \end{array}$$

Detengamos un momento nuestro análisis, para determinar quien es este determinante, que aparece en la etapa marcada $(\star)$

$$\begin{aligned} [\lambda 1_{\mathbb{V}} - T]_{\alpha}^{\alpha} &= [\lambda 1_{\mathbb{V}}]_{\alpha}^{\alpha} - [T]_{\alpha}^{\alpha} \\ &= \lambda [1_{\mathbb{V}}]_{\alpha}^{\alpha} - [T]_{\alpha}^{\alpha} \\ &= \lambda I_n - (a_{ij}) \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (\lambda - a_{22}) & -a_{13} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & (\lambda - a_{33}) & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & (\lambda - a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (\star\star) \end{aligned}$$

Retornado a $(\star\star)$ a $(\star)$ podemos concluir nuestro análisis como sigue

$$\begin{aligned} T(v) = \lambda v \quad &\Longleftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (\lambda - a_{22}) & -a_{13} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & (\lambda - a_{33}) & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & (\lambda - a_{nn} \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0 \qquad (\star\star\star) \end{aligned}$$

Para formalizar esta observación hacemos las siguientes definiciones

Definición 2.3. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$, y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. diremos que v es un vector propio del operador T si,*

(1) $v \neq 0_{\mathbb{V}}$

(2) $(\exists \lambda; \lambda \in \mathbb{K})$ *tal que* $T(v) = \lambda v$

λ, será llamado valor propio asociado al vector propio v

Definición 2.3.1. *Llamaremos polinomio característico de T al polinomio*

$$P_T(\lambda) \quad = \quad \det([\lambda 1_{\mathbb{V}} - T]_{\alpha}^{\alpha}) \quad (\text{ Para cualquier base de } \mathbb{V}) \tag{1}$$

De acuerdo a las definiciones hechas podemos caracterizar al nexo que existe entre los valores propios y los vectores propios como sigue.

Lema 2.3.2. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$, y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$, v es un vector propio del operador T si y sólo si $(\exists \lambda_0; \lambda_0 \in \mathbb{K})$ tal que $P_T(\lambda_0) = 0$*

Teorema 2.4. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$, y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ entonces para cada $\lambda \in \mathbb{K}$*

$$\mathbb{V}_{\lambda} \quad = \quad \{v \in \mathbb{V} \mid T(v) = \lambda v\} \leq \mathbb{V}$$

En efecto

(1) $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V} \ \wedge \ T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{V}} = \lambda 0_{\mathbb{V}}$. *Así que* $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}_{\lambda}$, *y* $\mathbb{V}_{\lambda} \neq \emptyset$

(2) *Si* $u \in \mathbb{V}_{\lambda}$ *y* $v \in \mathbb{V}_{\lambda}$ *entonces*

$$\left.\begin{array}{lcl} u \in \mathbb{V}_{\lambda} & \Longleftrightarrow & u \in \mathbb{V} \wedge T(u) = \lambda u \\ v \in \mathbb{V}_{\lambda} & \Longleftrightarrow & v \in \mathbb{V} \wedge T(v) = \lambda v \end{array}\right\} \Longrightarrow (u+v) \in \mathbb{V} \wedge T(u+v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$$

Así que, $(u+v) \in \mathbb{V}_{\lambda}$

(3) *Si* $u \in \mathbb{V}_{\lambda}$ *y* $\gamma \in \mathbb{K}$ *entonces*

$$\begin{array}{lcl} u \in \mathbb{V}_{\lambda} & \Longleftrightarrow & u \in \mathbb{V} \wedge T(u) = \lambda u \\ & \Longrightarrow & \gamma u \in \mathbb{V} \wedge T(\gamma u) = \gamma T(u) \\ & \Longrightarrow & \gamma u \in \mathbb{V} \wedge T(\gamma u) = \gamma \lambda u \\ & \Longrightarrow & \gamma u \in \mathbb{V} \wedge T(\gamma u) = \lambda \gamma u \\ & \Longrightarrow & \gamma u \in \mathbb{V}_{\lambda} \end{array}$$

Luego, $\mathbb{V}_{\lambda} \leq \mathbb{V} \quad (\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{K})$

Definición 2.4.1. *$\mathbb{V}_{\lambda}$ se llamará subespacio propio asociado al valor propio λ*

Ejemplo 2.4.2. *Sea* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))$ *tal que* $T\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z\\ y-z\\ -z\end{pmatrix}$.

(1) *En primer lugar, determinemos los valore propios de* T

- $[T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, *donde* $c(3) = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$
- *Entonces el polinomio característico es del tipo*

$$P_T(\lambda) = \det\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 0 & -2\\ 0 & (\lambda-1) & 1\\ 0 & 0 & (\lambda+1)\end{pmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

Así que los valores propios son $V.P = \{1,-1\}$

(2) *Determinemos los vectores propios de* T

En general

$$\begin{aligned}
A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_\lambda &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)\ \wedge\ T(A) = \lambda A\\
&\iff A = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \wedge\ T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\
&\iff A = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \wedge\ \begin{pmatrix}x+2z\\y-z\\-z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\
&\iff A = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \wedge\ \left.\begin{array}{rcl} x+2z &=& \lambda x\\ y-z &=& \lambda y\\ -z &=& \lambda z\end{array}\right| \qquad (*)
\end{aligned}$$

Caso 1. $\lambda = 1$. *De* $(*)$ *sigue que*

$$\begin{aligned}
A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_1 &\iff A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)\ \wedge\ T(A) = A\\
&\iff A = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \wedge\ \left.\begin{array}{rcl} x+2z &=& x\\ y-z &=& y\\ -z &=& z\end{array}\right|\\
&\iff A = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \wedge\ z = 0\\
&\iff A = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_1 = \left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$

Caso 2. Caso 2. $\lambda = -1$. *De* $(*)$ *sigue que*

$$
\begin{aligned}
A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_{-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1) \ \wedge \ T(A) = -A \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \wedge \ \left.\begin{array}{lcl} x+2z & = & -x \\ y-z & = & -y \\ -z & = & -z \end{array}\right| \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \wedge \ x = -z \wedge y = \frac{1}{2}z \\
&\Longleftrightarrow \quad A = z\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego, $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_{-1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

(3) *Finalmente podemos observar que*

$$
\alpha \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
$$

Es una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$ *y que en esa base el operador* T *se representa como una matriz diagonal*

En efecto

$$
\begin{aligned}
[T]_{\alpha}^{\alpha} \quad &= \quad \left(\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha} \ \left[T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha} \ \left[T\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\alpha} \right) \\
&= \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.4.3. *Sea* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $T(x, y, z) = (3x+z, 3y+2z, -z)$. *Determinemos valores y vectores propios de* T.

Etapa 1. Determinemos los valores propios de T.

(1) *Construimos* $P_T(\lambda)$, *el polinomio característico de* T.

- $[T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \wedge \qquad [\lambda 1_V]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

- $P_T(\lambda) = \det \begin{bmatrix} (\lambda-3) & 0 & -1 \\ 0 & (\lambda-3) & -2 \\ 0 & 0 & (\lambda+1) \end{bmatrix} = (\lambda-3)^2(\lambda+1)$

(2) *Hacemos* $P_T(\lambda) = 0$

$$\begin{aligned} P_T(\lambda) = 0 &\iff (\lambda - 3)^2(\lambda + 1) = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda_1 = 3 \quad \vee \quad \lambda_2 = -1) \end{aligned}$$

. Luego, los valores propios son $V.P = \{3, -1\}$

Etapa 2. Determinamos los subespacios propios.

(1) *Proceso general:*

$$\begin{aligned} u \in \left(\mathbb{R}^3\right)_\lambda &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge T(u) = \lambda u \\ &\iff u = (x, y, z) \wedge T(x, y, z) = \lambda(x, y, z) \\ &\iff u = (x, y, z) \wedge T(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &\iff u = (x, y, z) \wedge (3x + z, 3y + 2z, -z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &\iff u = (x, y, z) \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{rcl} 3x + z & = & \lambda x \\ 3y + 2z & = & \lambda y \\ -z & = & \lambda z \end{array}\right| \qquad (\star) \end{aligned}$$

(2) *Evaluamos* $(\star)$ *en los valores propios:*

- $\lambda = 3$

  De $(\star)$*, sigue que*

$$\begin{aligned} u \in \left(\mathbb{R}^3\right)_3 &\iff u = (x, y, z) \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{rcl} 3x + z & = & 3x \\ 3y + 2z & = & 3y \\ -z & = & 3z \end{array}\right| \\ &\iff u = (x, y, z) \quad \wedge \quad z = 0 \\ &\iff u = (x, y, 0);\ x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R} \\ &\iff u = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \\ &\iff \left(\mathbb{R}^3\right)_3 = \langle\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}\rangle \end{aligned}$$

- $\lambda = -1$

  De $(\star)$*, sigue que*

$$\begin{aligned} u \in \left(\mathbb{R}^3\right)_{-1} &\iff u = (x, y, z) \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{rcl} 3x + z & = & -x \\ 3y + 2z & = & -y \\ -z & = & -z \end{array}\right| \\ &\iff u = (x, y, z) \quad \wedge \quad z = -4x :\ y = 2x \\ &\iff u = (x, 2x, -4x);\ x \in \mathbb{R} \\ &\iff u = x(1, 2, -4) \\ &\iff \left(\mathbb{R}^3\right)_{-1} = \langle\{(1, 2, -4)\}\rangle \end{aligned}$$

(3) *Sea* $\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 2, -4)\}$ *entonces como*

$$[T]_\alpha^\alpha = \left(\begin{array}{ccc} [T(1,0,0)]_\alpha & [T(0,1,0)]_\alpha & [T(1,2,-4)]_\alpha \end{array} \right) \tag{2}$$

y,

- $T(1,0,0) = 3(1,0,0)$
- $T(0,1,0) = 3(0,1,0)$
- $T(1,2,-4) = -(1,2,-4)$

Sustituyendo en (2) tenemos que

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Es una matriz diagonal, o mejor el operador T se representa como una matriz diagonal, en la base de vectores propios α.

Ejemplo 2.4.4. *Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(x,y,z) = (3x+2y+z, 3y+2z, -z)$. Determinemos valores y vectores propios de T.*

Etapa 1. Determinemos los valores propios de T.

(1) *Construimos $P_T(\lambda)$, el polinomio característico de T.*

- $[T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad [\lambda 1_V]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

- $P_T(\lambda) = \det \begin{bmatrix} (\lambda-3) & -2 & -1 \\ 0 & (\lambda-3) & -2 \\ 0 & 0 & (\lambda+1) \end{bmatrix} = (\lambda-3)^2(\lambda+1)$

(2) *Hacemos $P_T(\lambda) = 0$*

$$\begin{aligned} P_T(\lambda) = 0 &\iff (\lambda-3)^2(\lambda+1) = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda_1 = 3 \quad \wedge \quad \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

Luego, los valores propios son $V.P = \{3, -1\}$

Etapa 2. Determinamos los subespacios propios.

(1) *Proceso general:*

$$\begin{aligned} u \in \left(\mathbb{R}^3\right)_{\lambda} &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge T(u) = \lambda u \\ &\iff u = (x,y,z) \wedge T(x,y,z) = \lambda(x,y,z) \\ &\iff u = (x,y,z) \wedge T(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &\iff u = (x,y,z) \wedge (3x+2y+z, 3y+2z, -z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &\iff u = (x,y,z) \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{lcl} 3x+2y+z & = & \lambda x \\ 3y+2z & = & \lambda y \\ -z & = & \lambda z \end{array}\right| \qquad (\star) \end{aligned}$$

(2) *Evaluamos $(\star)$ en los valores propios:*

- $\lambda = 3$

  De ($\star$), sigue que

$$
\begin{aligned}
u \in \left(\mathbb{R}^3\right)_3 &\iff u = (x,y,z) \quad \wedge \quad \begin{array}{lcl} 3x+2y+z &=& 3x \\ 3y+2z &=& 3y \\ -z &=& 3z \end{array} \\
&\iff u = (x,y,z) \quad \wedge \quad z = 0;\ y = 0 \\
&\iff u = (x,0,0);\ x \in \mathbb{R} \\
&\iff u = x(1,0,0) \\
&\iff \left(\mathbb{R}^3\right)_3 = \langle\{(1,0,0)\}\rangle
\end{aligned}
$$

- $\lambda = -1$

  De ($\star$), sigue que

$$
\begin{aligned}
u \in \left(\mathbb{R}^3\right)_{-1} &\iff u = (x,y,z) \quad \wedge \quad \begin{array}{lcl} 3x+2y+z &=& -x \\ 3y+2z &=& -y \\ -z &=& -z \end{array} \\
&\iff u = (x,y,z) \quad \wedge \quad z = -2y;\ x = 0 \\
&\iff u = (0,y,-2y);\ y \in \mathbb{R} \\
&\iff u = x(0,1,-2) \\
&\iff \left(\mathbb{R}^3\right)_{-1} = \langle\{(0,1,-2)\}\rangle
\end{aligned}
$$

Luego, no existe una base de vectores propios α tal que T se represente como una matriz diagonal.

Los Ejemplos 2.4.2, 2.4.3 y 2.4.4 sugieren las siguientes reflexiones:

Reflexiones 2.4.5. *En ejemplo 2.4.2 y 2.4.3 aseguramos que el conjunto α de vectores propios era una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, en realidad esto es producto del siguiente suceso*

Sea $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Supongamos que λ y μ son valores propios de T y que $u \in (\mathbb{V}_\lambda - \{0_{\mathbb{V}}\})$ y $v \in (\mathbb{V}_\mu - \{0_{\mathbb{V}}\})$ entonces

$$\lambda \neq \mu \implies \alpha = \{u, v\} \text{ es un conjunto linealmente independiente}$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
a_1u + a_2v = 0_V &\implies T(a_1u + a_2v) = T(0_V) \\
&\implies a_1T(u) + a_2T(v) = 0_V \\
&\implies a_1\lambda u + a_2\mu v = 0_V
\end{aligned}
$$

Juntando la información obtenemos que

$$\begin{array}{lcl} a_1u + a_2v &=& 0_V \\ a_1\lambda u + a_2\mu v &=& 0_V \end{array} \implies \begin{array}{lcl} a_1\lambda u + a_2\lambda v &=& 0_V \\ a_1\lambda u + a_2\mu v &=& 0_V \end{array} \implies a_2(\lambda - \mu)v = 0_{\mathbb{V}} \implies a_2 = 0$$

Análogamente,

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1u + a_2v & = & 0_V \\ a_1\lambda u + a_2\mu v & = & 0_V \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} a_1\mu u + a_2\mu v & = & 0_V \\ a_1\lambda u + a_2\mu v & = & 0_V \end{array}\right| \Longrightarrow a_1(\lambda - \mu)u = 0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow a_1 = 0$$

Así que, $\alpha = \{u, v\}$ *es linealmente independiente.*

Reflexiones 2.4.6. *En Ejemplo 2.4.3 y 2.4.4 el polinomio característico* $P_T(\lambda)$ *es el mismo, sin embargo en Ejemplo 2.4.3 existe la base que permite representar a* T *como una matriz diagonal y en Ejemplo 2.4.4 no existe una tal base.*

(1) *La conclusión inicial es que el polinomio característico* $P_T(\lambda)$, *no es la herramienta de clasificación para la existencia de la base que representa diagonalmente a un operador lineal*

(2) *Si llamamos multiplicidad algebraica de* λ *en símbolos* $m.a.(\lambda)$ *a las veces que el valor propio* λ, *aparece repetido en* $P_T(\lambda)$, *y multiplicidad geométrica de* λ *en símbolos,* $m.g.(\lambda)$ *a la dimensión del subespacio propio* $\left(\mathbb{R}^3\right)_\lambda$ *entonces*

- *En Ejemplo* (2.4.3), *tenemos el siguiente comportamiento:*

m.a.(3)=2	*m.g.(3)=2*	*m.a.(3)=m.g.(3)*
m.a.(-1)=1	*m.g.(-1)=1*	*m.a.(-1)=m.g.(-1)*

(4)

(5)

Lo que significa que:

$$P_T(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1) \quad \wedge \qquad \mathbb{R}^3 = \underbrace{\left(\mathbb{R}^3\right)_3}_{dim\ 2} \oplus \underbrace{\left(\mathbb{R}^3\right)_{-1}}_{dim\ 1}$$

- *En* (2.4.4), *tenemos el siguiente comportamiento:*

m.a.(3)=2	*m.g.(3)=1*	*m.a.(3)¿m.g.(3)*
m.a.(-1)=1	*m.g.(-1)=1*	*m.a.(-1)=m.g.(-1)*

(6)

(7)

Lo que se traduce en:

$$P_T(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1) \quad \wedge \qquad \underbrace{\left(\mathbb{R}^3\right)_3}_{dim\ 1} \oplus \underbrace{\left(\mathbb{R}^3\right)_{-1}}_{dim\ 1} \leq \mathbb{R}^3$$

(3) *Luego, existe una relación importante entre los conceptos:* $m.a.(\lambda)$, $m.g.(\lambda)$ *y la existencia de una base de vectores propios de* V.

Así que llega la hora de formalizar y buscar relaciones entre estos conceptos claves.

Definición 2.5. *Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y λ, un valor propio de $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ entonces notaremos:*

(i) $m.a.(\lambda)=$ *multiplicidad algebraica de* λ

(ii) $m.g.(\lambda) = dim_{\mathbb{K}}\,(V)_\lambda$

Lema 2.5.1. *Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y λ_0, un valor propio de T entonces*

$$m.g.(\lambda_0) \quad \leq \quad m.a.(\lambda_0) \tag{8}$$

La demostración es un poco técnica, pero útil para el desarrollo algorítmico del pensamiento modelístico

(1) *Supongamos que $m.a.(\lambda_0) = s$, con $s \geq 1$ y $m.g.(\lambda_0) = r$*

(2) *Sea $u \in (V)_{\lambda_0}$ entonces $T(u) = \lambda_0 u$. Ahora atención con la siguiente idea central !!!*

$$\begin{aligned} T(T(u)) &= T(\lambda_0 u) \\ &= \lambda_0 T(u) \end{aligned}$$

Luego,

$$u \in (V)_{\lambda_0} \quad \Longrightarrow T(u) \in (V)_{\lambda_0} \tag{9}$$

(3) *Lo obtenido en (9), nos permite decir que*

$$T\left[(V)_{\lambda_0}\right] \subset (V)_{\lambda_0} \tag{10}$$

La propiedad expresada en (10), técnicamente significa" $(V)_{\lambda_0}$ es un subespacio invariante de T", pero más allá de tecnicismos, esta propiedad se usa para definir nuevas funciones a partir de la función original, como sigue:

$$T_0 : (V)_{\lambda_0} \longmapsto (V)_{\lambda_0} \quad \text{tal que } T_0(u) = T(u)$$

Así T_0 es una restricción de T al subespacio $(V)_{\lambda_0}$ y por ende satisface las siguientes propiedades:

- $T_0 \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}\left[(V)_{\lambda_0})\right]$, *es decir T_0 es un operador de $(V)_{\lambda_0}$*
- $P_{T_0}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^r$ *y* $\partial(P_{T_0}(\lambda)) \leq \partial(P_T(\lambda))$

Así, $m.g.(\lambda_0) \leq m.a.(\lambda_0)$

Motivados por el Lema 2.5.1 y por el Ejemplo 2.4.4, se justifica la siguiente definición.

Definición 2.6. *Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$. Diremos que T es un operador diagonalizable si existe una base de vectores propios, α de V. Caso contrario decimos que T no es diagonalizable.*

Teorema 2.7. *Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ tal que:*

- $P_T(\lambda) = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{n_i};\ (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j)$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} n_i = n$

entonces T diagonalizable si y sólo si $m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i)$ para $i = 1, \ldots, n$

En efecto

(1) *Sea α_i una base de V_{λ_i}, para $i = 1, 2, \ldots s$*

(2) *Sea* $\alpha = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{s} \alpha_i$

entonces $m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i) \Longleftrightarrow \alpha$ es una base de V

Conclusión 2.8. *Si V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita n y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ tal que*

$$P_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{n_i};\ (\lambda_i \neq \lambda_j si\ i \neq j)$$

es el polinomio característico de T entonces

(1) $P_T(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ *con* $\partial(P_T(\lambda)) = n$, *pues* $\sum\limits_{i=1}^{s} m.a.(\lambda_i) = n$

(2) λ_0 *es un valor propio de T si* $P_T(\lambda_0) = 0$

(3) T *diagonalizable si y sólo si* $m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i)$ *para* $i = 1, \dots, n$ *y en tal caso tenemos que:*

- *Existe una base* $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cdots \cup \alpha_s$ *de V tal que α_i es base de V_{λ_i}, para cada* $i = 1, \dots s$ *y*

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_s \end{bmatrix} \tag{11}$$

- *V se descompone en suma directa de subespacios propios:*

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \cdots \oplus V_{\lambda_s} \tag{12}$$

Es decir,

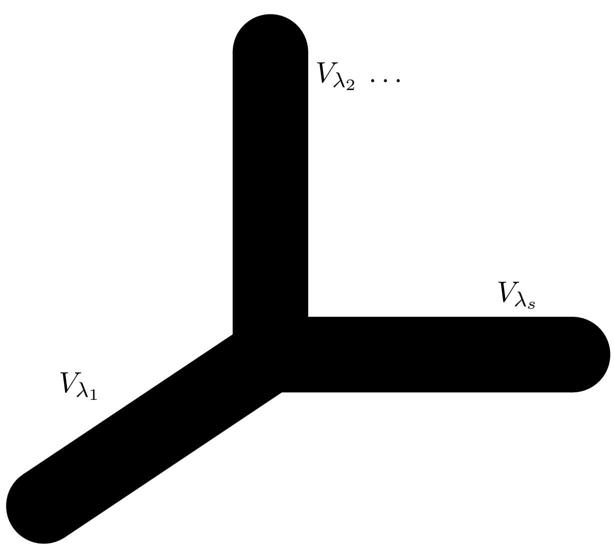

Figura 1: $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \cdots \oplus V_{\lambda_s}$

- *T se descompone en una suma de operadores del tipo:*

$$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_s \tag{13}$$

donde $T_i(u) = \lambda_i u$, *para cada* $i = 1, 2, \dots, s$

Observación 2.9. *Es evidente, que esta forma de verificar si un operador es o no diagonalizable tiene inconvenientes tales como:*

(1) *Es impracticable si el número de valores propios es grande (a menos que usemos el computador, Maple, Matlab, Matemática, etc.)*
(2) *Es posible que en muchos casos, se desee saber sólo, si el operador es diagonalizable o no; en tal caso se necesita una técnica diferente.*

3. Ejercicios Propuestos De Valores y Vectores Propios

Determine valores y vectores propios de las siguientes transformaciones lineales y matrices:

(1) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, tal que $T(x,y) = (3y, 2x)$

(2) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, tal que $T(x,y) = (x+y, 2x+y)$

(3) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, tal que $T(x,y,z) = (x+y, x-y+2z, 2x+y-z)$

(4) $T \in \mathbb{R}_2[x]$, tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_0x + a_2x^2$

(5) $T \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, tal que $T(A) = A^t$

(6) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, tal que $T(x,y,z,w) = (x, x+y, x+y+z, x+y+z+w)$

(7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(9) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(11) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, tal que:

  (a) $(\mathbb{R}^2)_{-2} = \langle\{(3,1)\}\rangle$ y
  (b) $(\mathbb{R}^2)_3 = \langle\{(-2,1)\}\rangle$

(12) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, tal que:

  (a) $(\mathbb{R}^3)_0 = \langle\{(1,1,1),(-1,-1,0)\}\rangle$ y
  (b) $(\mathbb{R}^3)_1 = \langle\{(1,0,0)\}\rangle$

(13) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ tal que $T \circ T = T$. Determine valores y vectores propios de T.

(14) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Demuestre que.

$$\mathbb{V}_0 \neq \{0_V\} \Longleftrightarrow T \text{ no inyectiva}$$

4. Un Criterio de Diagonalización

Como vimos en los ejemplos (2.4.3) (2.4.4) el polinomio característico es $P_T(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda+1)$. Sin embargo en un caso T diagonaliza y en el otro no diagonaliza, la razón expuesta es que la $m.a(3) = m.g(3) = 2$ en el primer caso y $m.a(3) = 2 > m.g(3) = 1$ en el segundo caso, pero por las precisiones anteriores resulta demasiado caro en tiempo y espacio esta solución, así que implementaremos otra técnica que no tenga tales deficiencias, pero como siempre nada es gratis así que de acuerdo a la ley de costo beneficio hay que asumir algún costo, que en este caso consiste en generar o mejor generalizar alguna ideas.

4.1. El Fundamento Conocido de $\mathbb{K}_n[x]$. En este apartado, revisaremos las propiedades fundamentales del anillo de polinomios, con miras a ser generalizadas en beneficio de nuestro estudio.

(1) Los polinomios se caracterizan como sigue:

$$p(x) \in \mathbb{K}_n[x] \quad \Longleftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \Longleftrightarrow p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i, \qquad \text{donde } x^0 = 1$$

(2) Cada polinomio de la forma; $p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_ix^i \in \mathbb{K}_n[x]$, "actúa naturalmente como función sobre el cuerpo $\mathbb{K}$", como sigue

$$p(x) : \mathbb{K} \longmapsto \mathbb{K}; \text{ tal que } u \in \mathbb{K} \longmapsto p(u) = \sum_{i=0}^{n} a_iu^i$$

(3) En particular, sabemos que:

$$(u \text{ es una raíz de } p(x) \Longleftrightarrow u \in \mathbb{K} \wedge p(u) = 0) \Longleftrightarrow (p(x) \in ker(\varphi(u)))$$

(4) En realidad, lo anterior tiene sentido porque en $\mathbb{K}$, se verifican naturalmente las siguientes propiedades:

- $u \in \mathbb{K} \wedge a \in \mathbb{K} \Longrightarrow a \cdot u \in \mathbb{K}$
- En particular, $u \in \mathbb{K} \Longrightarrow u^s \in \mathbb{K}\ (\forall s; s \in \mathbb{N})$

(5) Así que " en cualquier conjunto que sus elementos posean estas propiedades, podemos hacer actuar al anillo de polinomios", $\mathbb{K}_n[x]$

4.2. Generalización al Anillo de Matrices. En concordancia con las ideas desarrolladas en la sección anterior, podemos iniciar nuestro proceso de generalización haciendo la definición

Definición 4.2.1. *Cada $p(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ actuará sobre el anillo y espacio vectorial $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(s)$ como sigue:*

$$p(x) : \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(s) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(s) \qquad \textit{tal que } A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(s) \longmapsto p(A) = \sum_{i=0}^{n} a_iA^i \quad \textit{donde} \quad A^0 = I_n$$

Ejemplo 4.2.2. *En este ejemplo aprovecharemos, valga la redundancia, de analizar la situación presentada por los ejemplos (2.4.3) y (2.4.4) a la luz de esta nueva herramienta. Sabemos que en ambos ejemplos el polinomio característico es $P_T(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$ entonces*

(1) *En Ejemplo (2.4.3) tenemos que,*

$$
\begin{aligned}
P_T\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right) &= \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Si llamamos $m_T^{(1)}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$ *entonces en Ejemplo* (2.4.3) *tenemos que*

$$
\begin{aligned}
m_T^{(1)}\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right) &= \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(2) *Un cálculo análogo para el Ejemplo* (2.4.4) *nos dice que*

$$
\begin{aligned}
P_T\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right) &= \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Y si llamamos $m_T^{(2)}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$ *entonces en el Ejemplo* (2.4.4) *tenemos que*

$$
\begin{aligned}
m_T^{(2)}\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right) &= \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Así que tenemos las siguientes conclusiones:

(1) *En* (2.4.3) *y* (2.4.4) *se verificó que* $P_T\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right) = (0)$

(2) *En* (2.4.3) $m_T^{(1)}\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right) = (0)$

(3) *En* (2.4.4) $m_T^{(2)}\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right) \neq (0)$

Lo anterior nos motiva para hacer la siguiente:

Definición 4.3. *Si* $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ *entonces llamaremos anulador de la matriz* A*, al conjunto*

$$I(A) = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(A) = (0)\}$$

Ejemplo 4.3.1. $p(x) = (x-3)^2(x+1) \in I(A)$ *si* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Observación 4.3.2. *Para el conjunto* $I(A)$ *tenemos las siguientes propiedades:*

(1) *Si* $p(x) \in I(A)$ *y* $q(x) \in I(A)$ *entonces* $(p(x) - q(x))(A) = p(A) - q(A) = (0)$

Conclusión, para cualquier $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ *tenemos que*

$$p(x) \in I(A) \quad \wedge \quad q(x) \in I(A) \Longrightarrow (p(x) - q(x)) \in I(A)$$

(2) *Sea* $a \in \mathbb{K}$ *y* $p(x) \in I(A)$ *entonces* $(a \cdot p(x))(A) = a \cdot p(A) = a \cdot (0) = (0)$

Conclusión, para cualquier $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ *tenemos que*

$$a \in \mathbb{K} \quad \wedge \quad p(x) \in I(A) \Longrightarrow (a \cdot p(x)) \in I(A)$$

Teorema 4.4. (Teorema de Cayley) *Si* $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ *entonces* $P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) \in I(A)$*, es decir* $P_A(A) = (0)$

En efecto

En primer lugar, sabemos que,

$$Si\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\ entonces\ Adj(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \dots & \Delta_{2n} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \dots & \Delta_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \Delta_{n3} & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}^t$$

Y que

$$(\lambda I_n - A)Adj(\lambda I_n - A) \quad = \quad \det(\lambda I_n - A)I_n \tag{14}$$

Además, $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det((\lambda I_n - A)_{ij})$ *es un polinomio de grado* $(n-1)$*, para cada* i *y para cada* j*, así que:*

$$Adj(\lambda I_n - A) \quad = \quad \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}B_{n-2} + \lambda^{n-3}B_{n-3} + \cdots + B_0 \tag{15}$$

Donde cada B_i *para* $i = 0, 1, \dots, n-1$*, es una matriz de orden* n*, y*

$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_0 \tag{16}$$

Ahora, aplicando, (15) *y* (16) *en* (14) *tenemos;*

$$\begin{aligned} (\lambda I_n - A)Adj(\lambda I_n - A) &= (\lambda I_n - A)\left(\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i B_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^{i+1}B_i - \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i AB_i \\ &= -AB_0 + \lambda(B_0 - AB_1) + \cdots + \lambda^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + \lambda^n I_n \end{aligned}$$

Aplicando este resultado en (14) *e igualando coeficientes tenemos el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{array}{rcl} -AB_0 &=& b_0 I_n \\ B_0 - AB_1 &=& b_1 I_n \\ B_1 - AB_2 &=& b_2 I_n \\ B_2 - AB_3 &=& b_3 I_n \\ \dots\dots\dots\dots & . & \dots\dots \\ B_{n-3} - AB_{n-2} &=& b_{n-2} I_n \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &=& b_{n-1} I_n \\ B_{n-1} &=& I_n \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} -AB_0 &=& b_0 I_n \\ AB_0 - A^2B_1 &=& b_1 A \\ A^2B_1 - A^3B_2 &=& b_2 A^2 \\ A^3B_2 - A^4B_3 &=& b_3 A^3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & . & \dots\dots\dots \\ A^{n-2}B_{n-3} - A^{n-1}B_{n-2} &=& b_{n-2}A^{n-2} \\ A^{n-1}B_{n-2} - A^nB_{n-1} &=& b_{n-1}A^{n-1} \\ A^nB_{n-1} &=& A^n \\ \hline (0) &=& P_A(A) \end{array}$$

(Hemos multiplicado por $A, A^2, \dots, A^{n-2}$*, y sumado miembro a miembro)*

Corolario 4.4.1. *Si* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ *entonces para cualquier base* α *de* $\mathbb{V}$*,*

$$P_T(\lambda) = \det(\lambda I_n - [T]_\alpha^\alpha) \in I([T]_\alpha^\alpha)$$

Definición 4.5. *Sea* $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ *entonces diremos que* $m_A(\lambda)$ *es el polinomio mínimo de* A *si:*

1. $m_A(A) = (0)$, *es decir* $m_A(\lambda) \in I_A$
2. $m_A(\lambda)$ *es mónico, es decir su coeficiente lider es uno.*
3. *Si* $p(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ *tal que* $p(A) = (0)$ *entonces* $\partial(m_A(\lambda)) \leq \partial(p(\lambda))$

Ejemplo 4.5.1. *En* (2.4.3) $P_T(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$ *y el polinomio minimal es:* $m_T(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$

Ejemplo 4.5.2. *En* (2.4.4) $P_T(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$ *y el polinomio minimal es:* $m_T(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$

Como también sabemos en (2.4.3) T es diagonalizable y en (2.4.4) T no es diagonalizable, luego la diferencia es el polinomio minimal, respecto de este tenemos los siguientes resultados:

Lema 4.5.3. *Si* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ *entonces vale la equivalencia*

$$P_T(\lambda_0) = 0 \Longleftrightarrow m_T(\lambda_0) = 0 \tag{17}$$

Es decir, el polinomio característico y minimal tienen las mismas raíces, para una demostración ver [**9**]

Teorema 4.6. *Si* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ *tal que* $P_T(\lambda) = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ *para* $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ *entonces*

$$T \text{ diagonalizable } \Longleftrightarrow m_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i) \tag{18}$$

en efecto

Sea $A = [T]_\alpha^\alpha$, donde α es una base cualquiera de $\mathbb{V}$ entonces sabemos que A diagonalizable si y sólo si existe una base β; de vectores propios de $\mathbb{V}$; y en tal caso se verifica la identidad:

$$A = [I]_\beta^\alpha \, [T]_\beta^\beta \, [I]_\alpha^\beta = [I]_\beta^\alpha \, [T]_\beta^\beta \left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1}$$

Donde, $[T]_\beta^\beta$ es una matriz diagonal del tipo:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_s \end{bmatrix}$$

Finalmente,

$$m_T(A) = m_T([I]_\beta^\alpha \, [T]_\beta^\beta \left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1}) = [I]_\beta^\alpha \, m_T([T]_\beta^\beta) \left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1}, \text{ y } m_T([T]_\beta^\beta) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_s)$$

5. Ejercicios Resueltos de Diagonalización

(1) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(x, y, z) = (-x + z, 2x + 3y + 4z, -x - 3z)$ entonces

Etapa 1. Construyamos el polinomio característico:

(i) Determinemos $[T]_{c(3)}^{c(3)}$

$$A = [T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(ii) Determinemos el polinomio característico:

$$
\begin{aligned}
P_T(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda-3 & -4 \\ 1 & 0 & \lambda+3 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-3)[(\lambda+1)(\lambda+3)+1] \\
&= (\lambda-3)[\lambda^2+4\lambda+4] \\
&= (\lambda-3)(\lambda+2)^2
\end{aligned}
$$

Luego, los valores propios son:

$$V.P \;=\; \{-2, 3\}$$

Etapa 2. Verifiquemos si T es diagonalizable:

$$
\begin{aligned}
(A-3I_3)(A+2I_3) &= \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

Así que T no es diagonalizable.

(2) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_2+a_0x+a_1x^2$ entonces

Etapa 1. Construyamos el polinomio característico:

(i) Determinemos $[T]_{p(2)}^{p(2)}$, donde $p(2) = \{1, x, x^2\}$

$$A = [T]_{p(2)}^{p(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Determinemos el polinomio característico:

$$
\begin{aligned}
P_T(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda\lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^3 - 1 \\
&= (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)
\end{aligned}
$$

Luego, el valor propio real es:

$$V.P \;=\; \{1\}$$

Etapa 2. Verifiquemos si T es diagonalizable:

Como $m.a(1) = 1$ entonces $m.g(1) = 1$, así que T no es diagonalizable.

(3) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que $T(A) = A - A^t$ entonces

Etapa 1. Construyamos el polinomio característico:

(i) Determinemos $[T]_{m(2)}^{m(2)}$, donde

$$m(2)=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$A=[T]_{m(2)}^{m(2)}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(ii) Determinemos el polinomio característico:

$$\begin{aligned}P_T(\lambda)&=\det\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&(\lambda-1)&1&0\\0&1&(\lambda-1)&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}\\&=\lambda^3(\lambda-2)\end{aligned}$$

Luego, los valores propios son:

$$V.P=\{0,2\}$$

Etapa 2. Verifiquemos si T es diagonalizable:

$$\begin{aligned}A\in(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_\lambda&\iff A\in(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))\wedge T(A)=\lambda A\\&\iff A\in(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))\wedge A-A^t=\lambda A\qquad(*)\end{aligned}$$

Así que de (*) sigue que:

$$\begin{aligned}A\in(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_0&\iff A\in(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))\wedge A-A^t=(0)\\&\iff A\in(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))\wedge A=A^t\\&\Longrightarrow (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_0=\left\langle\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle\end{aligned}$$

Luego,

$$\left.\begin{array}{lcl}m.a(0)=3&\wedge&m.g(0)=3\\m.a(2)=1&\wedge&m.g(2)=1\end{array}\right\}\Longrightarrow T\text{ diagonalizable}$$

(4) Sea $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&2&-1\\2&2&0\end{pmatrix}$ entonces

- $\det(A)=4$, luego A es invertible
- Calculemos su polinomio característico:

$$\begin{aligned}
P_T(\lambda) &= \det\left(\begin{pmatrix} (\lambda-3) & -1 & 1 \\ -2 & (\lambda-2) & 1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 1-\lambda & 0 \\ -2 & (\lambda-2) & 1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= (\lambda-1)\det\left(\begin{pmatrix} (\lambda-2) & 1 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix}\right) - (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda(\lambda-2)+2) + (\lambda-1)(-2\lambda+2) \\
&= (\lambda-1)[\lambda^2-2\lambda+2-2\lambda+2] \\
&= (\lambda-1)(\lambda-2)^2 \\
&= -\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4
\end{aligned}$$

- Estudiemos si es diagonalizable; es decir, veamos si el polinomio minimal es

$$m_T(\lambda) \stackrel{?}{=} (\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$\begin{aligned}
(A-I_3)(A-2I_3) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\neq (0)
\end{aligned}$$

Luego A, no es diagonalizable.

- Podemos usar el polinomio característico para, calcular A^{-1}, como sigue:

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) = \lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4 &\Longrightarrow A^3-5A^2+8A-4=0 \\
&\Longrightarrow A(A^2-5A+8I_3) = 4I_3 \\
&\Longrightarrow A\left(\frac{1}{4}A^2-\frac{5}{4}A+2I_3\right) = I_3 \\
&\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}A^2-\frac{5}{4}A+2I_3
\end{aligned}$$

(5) Sea $\mathbb{V}$, un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ tal que:

(i) $\mathbb{V}_{\lambda_1} = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_r\}\rangle \quad \wedge \quad \lambda_1 \in \mathbb{K}$

(ii) $\mathbb{V}_{\lambda_2} = \langle \{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_s\} \rangle \quad \wedge \quad \lambda_2 \in \mathbb{K}$

(iii) $\mathbb{V}_{\lambda_3} = \langle \{v_{s+1}, v_{s+2}, \dots, v_n\} \rangle \quad \wedge \quad \lambda_3 \in \mathbb{K}$

(a) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$

Etapa 1. Lo que debo hacer o me están pidiendo:

Debemos determinar $T(u)$, $(\forall u; u \in \mathbb{V})$

Etapa 2. Datos:

- $v_i \in \mathbb{V}_{\lambda_1} \Leftrightarrow T(v_i) = \lambda_1 v_i \quad (\forall i; 1 \leq i \leq r)$
- $v_i \in \mathbb{V}_{\lambda_2} \Leftrightarrow T(v_i) = \lambda_2 v_i \quad (\forall i; r+1 \leq i \leq s)$
- $v_i \in \mathbb{V}_{\lambda_3} \Leftrightarrow T(v_i) = \lambda_3 v_i \quad (\forall i; s+1 \leq i \leq n)$
- Como α es una base de $\mathbb{V}$, entonces para cada $u \in \mathbb{V}$ existen únicos escalares en $\mathbb{K}$, tales que:

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad (*)$$

Etapa 3. Ejecución.

De $(*)$, sigue que:

$$\begin{aligned}
T(u) &= T\left(\sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{i=r+1}^{s} a_i v_i + \sum_{i=s+1}^{n} a_i v_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} a_i T(v_i) + \sum_{i=r+1}^{s} a_i T(v_i) + \sum_{i=s+1}^{n} a_i T(v_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_1 v_i + \sum_{i=r+1}^{s} a_i \lambda_2 v_i + \sum_{i=s+1}^{n} a_i \lambda_3 v_i \\
&= \lambda_1 \sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \lambda_2 \sum_{i=r+1}^{s} a_i v_i + \lambda_3 \sum_{i=s+1}^{n} a_i v_i
\end{aligned}$$

(b) ¿ T es diagonalizable ?

Como α es una base de vectores propios de T entonces T, es diagonalizable y

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \lambda_3 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{19}$$

(c) ¿ T es un isomorfismo ?

Sabemos que T es un isomorfismo si y sólo si $\det(T) \neq 0$, así que en este caso;

$$\begin{aligned} T \text{ isomorfismo} \quad & \Longleftrightarrow \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \lambda_i \neq 0 \quad (\forall i; i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

(d) ¿ T^{-1} es invertible ?

Observamos que si $\lambda_i \neq 0 \quad (\forall i; i = 1, 2, 3)$ entonces T^{-1} existe y vale la fórmula fundamental

$$T(u) = v \quad \Longleftrightarrow \quad u = T^{-1}(v)$$

Así que en particular, tenemos

Para $1 \leq i \leq r$

$$T(v_i) = \lambda_1 v_i \quad \Longleftrightarrow \quad v_i = \lambda_1 T^{-1}(v_i) \quad \Longleftrightarrow \quad T^{-1}(v_i) = \frac{1}{\lambda_1} v_i$$

Para $r + 1 \leq i \leq s$

$$T(v_i) = \lambda_2 v_i \quad \Longleftrightarrow \quad v_i = \lambda_2 T^{-1}(v_i) \quad \Longleftrightarrow \quad T^{-1}(v_i) = \frac{1}{\lambda_2} v_i$$

Para $s + 1 \leq i \leq n$

$$T(v_i) = \lambda_3 v_i \quad \Longleftrightarrow \quad v_i = \lambda_3 T^{-1}(v_i) \quad \Longleftrightarrow \quad T^{-1}(v_i) = \frac{1}{\lambda_3} v_i$$

6. Ejercicios Propuestos de Diagonalización

(1) Verifique ¿cuál de los operadores propuestos en la Sección 3. es diagonalizable?

(2) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \neq 0 & : \text{ si } i \leq j \\ 0 & : \text{ en otro caso} \end{cases}$$

- Determine valores propios y subespacios propios de A.
- Determine el polinomio minimal de A.

(3) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Determine el conjunto:

$$S = \{a \in \mathbb{R} \mid A \text{ es diagonalizable}\}$$

(4) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine el conjunto:

$$S = \{a \in \mathbb{R} \mid A \text{ es diagonalizable}\}$$

(5) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ tal que $T \circ T = 0$. Determine valores y vectores propios de T.

(6) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $\det(A) \neq 0$.

- Demuestre que:
$$A \text{ diagonalizable } \Longrightarrow A^{-1} \text{ diagonalizable}$$
- Si A diagonalizable. Determine los subespacios propios de A^{-1}

(7) Considere la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} m & : \text{ si } i = j \\ a & : \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Donde, $m \neq 0$ y $a \neq 0$. Demuestre que

- $P_A(\lambda) = (\lambda - (m-a))^{n-1}(\lambda - (m + (n-1)a))$
- $\det(A) = (m-a)^{n-1} \cdot (m + (n-1)a)$

(8) Determine A^n. Si (a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

7. Aplicaciones

7.1. Modelo de Crecimiento Poblacional.

(1) **Planteamiento del Problema**

Análisis de un modelo que describa el crecimiento de una población usando valores y vectores propios.

(2) **Modelo 1**
Hipótesis de Trabajo

Suponemos que una cierta especie crece a una tasa de crecimiento constante en el tiempo (el tiempo, puede ser una hora, un día, una semana, un mes, un año, etc.)

Un tal caso, es dado si por ejemplo:

- Cada generación es distinta y,
- Cada organismo produce "r" críos y después muere.

Así si p_t, representa la población después de t, periodos entonces la ecuación que rige el crecimiento de dicha población es:

$$p_t = rp_{t-1} \quad \text{equivalentemente} \quad p_t = r^t p_0 \tag{20}$$

donde, p_0 representa la población inicial.

(3) **Conclusión al Modelo 1**

(i) $r > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} p_t = \lim\limits_{t\to\infty} r^t p_0 = \nexists$.

Es decir, la población aumenta geométricamente (sin cota superior) en el tiempo.

(ii) $r = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} p_t = \lim\limits_{t\to\infty} r^t p_0 = p_0$.

Es decir, la población mantiene crecimiento constante independiente del tiempo.

(iii) $r < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} p_t = \lim\limits_{t\to\infty} r^t p_0 = 0$.

Es decir, la población disminuye geométricamente a cero en el tiempo y por tanto se extinguirá.

(4) **Algunos problemas del Modelo 1**

(i) El crecimiento de una población en general no es a tasa constante.

(ii) En general el número de crías que puede generar una hembra depende de su edad

(5) **Modelo 2**

Hipótesis de Trabajo

Se estudiará un modelo de crecimiento poblacional, para una especie de pájaros, que satisface las siguientes condiciones:

(1) Número de hembras = Número de machos

(2.1) $p(j, n-1)$ = Población juvenil de hembras en el año $(n-1)$

(2.2) $p(a, n-1)$ = Población adulta de hembras en el año $(n-1)$

(3) α=probabilidad con que los pájaros jóvenes que sobreviven y llegan a adulto en el año n.

(4) k= promedio de pájaros hembras jóvenes, generado por las hembras adultas que sobreviven.

(5) β= probabilidad con que los pájaros adultos sobreviven de una primavera para otra.

(6) Toda la información anterior puede ser computada vía las ecuaciones:

$$\begin{array}{rclcl} p(j,n) & = & & & kp(\alpha, n-1) \\ p(a,n) & = & \alpha p(j, n-1) & + & \beta p(a, n-1) \end{array} \tag{21}$$

Equivalentemente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p(j,n) \\ p(j,n-1) \end{pmatrix}}_{p(n)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} p(j,n-1) \\ p(a,n-1) \end{pmatrix}}_{p(n-1)} \tag{22}$$

Análisis matemático del modelo

- De (22), sigue que

$$\begin{aligned} p(1) &= AP(0) \\ p(2) &= AP(1) = A^2p(0) \\ p(3) &= AP(2) = A^3p(0) \\ &\vdots \\ p(n) &= AP(n-1) = A^np(0) \end{aligned}$$

- Determinemos el polinomio característico de A:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} \lambda & -k \\ -\alpha & (\lambda-\beta) \end{pmatrix} \\ &= \lambda(\lambda-\beta) - k\alpha \\ &= \lambda^2 - \lambda\beta - k\alpha \end{aligned}$$

Luego,

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda\beta - k\alpha$$

- Ahora, para calcular los valores propios hacemos $P_A(\lambda) = 0$

Es decir;

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = 0 &\iff \lambda^2 - \lambda\beta - k\alpha = 0 \\ &\iff \lambda = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4k\alpha}}{2} \end{aligned}$$

Luego, los valores propios son:

$$V.P = \left\{ \frac{\beta - \sqrt{\beta^2+4k\alpha}}{2}, \frac{\beta + \sqrt{\beta^2+4k\alpha}}{2} \right\}$$

Además λ_1 y λ_2 satisfacen las propiedades:

(i) $\alpha \in [0,1]$ y $\beta \in [0,1]$ y $k > 0$ entonces $\beta^2 + 4k\alpha > 0$

(ii) Si $\lambda_1 = \frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4k\alpha}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4k\alpha}}{2}$ entonces $\lambda_1 > \lambda_2$ y $|\lambda_1| > |\lambda_2|$

- Sea $\alpha = \{v_1, v_2\}$, base de vectores propios de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, correspondiente a los valores propios λ_1 y λ_2, respectivamente entonces valen las siguientes propiedades:

  (i) Como $p(0) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y α es base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces existen únicos escalares a_1, a_2 tales que

$$p(0) = \begin{pmatrix} p(j,0) \\ p(a,0) \end{pmatrix} = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

  (ii) Sustituyendo en la ecuación central $p(n) = A^n p(0)$ tenemos que

$$\begin{aligned} p(n) &= A^n(a_1 v_1 + a_2 v_2) \\ &= a_1 A^n v_1 + a_2 A^n v_2 \\ &= a_1 \lambda_1^n v_1 + a_2 \lambda_2^n v_2 \\ &= \lambda_1^n \left(a_1 v_1 + \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]^n a_2 v_2 \right) \end{aligned}$$

(6) **Conclusión al Modelo 2**

- $\lim\limits_{n\to\infty} p(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_1^n \left(a_1 v_1 + \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]^n a_2 v_2 \right) \approx \lambda_1^n a_1 v_1$

(7) **Algunos problemas del Modelo 2**

  (i) La tasa de nacimiento y muerte cambia con frecuencia de un año para otro y depende del clima, este modelo supone clima constante.

  (ii) Muchas especies poseen una tasa de nacimiento y muerte que varia con el tamaño de la población, en particular una población no puede crecer indefinidamente a una tasa constante, caso contrario dominaría la tierra.

Ejemplo 7.2. *Apliquemos el modelo para el siguiente caso:*

(1) *Datos particulares:*
- $k = 2$
- $\alpha = 0.3$
- $\beta = 0.5$
- $p(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

(2) *Determinamos los valores y vectores propios de* $A = \begin{pmatrix} 0.0 & 2.0 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$

  (i) *Sus valores propios son:*

$$V.P = \{-05639, 1.0639\} = \{\lambda_2, \lambda_1\}$$

  (ii) *Sus vectores propios son:*

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\{ \begin{pmatrix} -0.9625 \\ 0.2714 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.8829 \\ -0.4697 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0.9625 \\ -0.2714 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8829 \\ 0.4697 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{v_2, v_1\} \end{aligned}$$

(3) *Aplicando las conclusiones del modelo 2, tenemos que:*

$$\begin{aligned} p(n) &\approx \lambda_1^n a_1 v_1 \\ &\approx 1.0639^n a_1 v_1 \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 > 1$ *entonces la población crecerá.*

8. Rudimentos sobre Operadores Especiales

8.1. Nueva mirada para las matrices cambio de coordenadas. Los elementos descritos aquí, son los que se analizaron en la sección Coordenadas y Matrices.

(1) Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V, que podemos asumir ortonormal, entonces tenemos el isomorfismo naturalmente inducido por al base α, entre V y su espacio coordenado $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1)$;

$$\begin{array}{rcccl} [\;]_\alpha & : & V & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \\ & & v & \longmapsto & [v]_\alpha \end{array} \quad \text{tal que} \quad [v]_\alpha = \begin{pmatrix} \langle v, v_1\rangle \\ \langle v, v_2\rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_n\rangle \end{pmatrix} \Longleftrightarrow v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i\rangle v_i$$

(2) Si $u \in V$ y $v \in V$ entonces del teorema (**??**) sigue que

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n \langle u, v_i\rangle \overline{\langle v, v_i\rangle}$$

(3) Juntando la información de los ítemes anteriores tenemos que, Si $\langle , \rangle$ es un producto interno en el espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ entonces $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1)$ es un espacio con producto interno, sobre $\mathbb{K}$, donde

$$\langle u, v\rangle = \langle [u]_\alpha, [v]_\alpha\rangle = [u]_\alpha^t \overline{[v]_\alpha} = \sum_{i=1}^n \langle u, v_i\rangle \overline{\langle v, v_i\rangle}$$

(4) Si $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ es otra base ortonormal de V entonces del diagrama conmutativo;

$$\begin{array}{ccc} (V, \alpha) & \stackrel{1_V}{\longmapsto} & (V, \beta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) & \stackrel{[I]_\alpha^\beta}{\longmapsto} & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \end{array} \tag{23}$$

Sigue que,

$$[I]_\alpha^\beta = ([v_1]_\beta, [v_2]_\beta, \dots, [v_n]_\beta) = (\langle v_i, w_j\rangle) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$$

En particular

$$\langle [v_k]_\beta, [v_s]_\beta\rangle = \langle v_k, v_s\rangle \Longrightarrow \langle [v_k]_\beta, [v_s]_\beta\rangle \quad = \quad \begin{cases} 1 & : k \neq s \\ 0 & : \text{otro caso} \end{cases}$$

Es decir, las columnas de la matriz cambio de base $[I]_\alpha^\beta$ son ortogonales dos a dos. Por tanto, Si V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ dos bases ortonormales de V entonces

$$[I]_\alpha^\beta \left([I]_\alpha^\beta\right)^t = I_n \Longleftrightarrow \left([I]_\alpha^\beta\right)^t = \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} \Longleftrightarrow \left([I]_\alpha^\beta\right)^t = [I]_\beta^\alpha$$

(5) Finalmente, como $\langle u,v\rangle = \langle [u]_\beta,[v]_\beta\rangle$ y $\left([I]_\alpha^\beta\right)^t = [I]_\beta^\alpha$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle [I]_\alpha^\beta\cdot[u]_\alpha,[v]_\beta\rangle &= ([I]_\alpha^\beta\cdot[u]_\alpha)^t\cdot\overline{[v]_\beta}\\
&= ([u]_\alpha)^t\cdot([I]_\alpha^\beta)^t\cdot\overline{[v]_\beta}\\
&= ([u]_\alpha)^t\cdot[I]_\beta^\alpha\cdot\overline{[v]_\beta}\\
&= ([u]_\alpha)^t\cdot(\overline{\overline{[I]_\beta^\alpha}\cdot[v]_\beta})\\
&= \langle [u]_\alpha,\overline{[I]_\beta^\alpha}\cdot[v]_\beta\rangle
\end{aligned}$$

Así que si llamamos $([I]_\alpha^\beta)^* = \overline{[I]_\beta^\alpha}$ entonces tenemos la identidad

$$\langle [I]_\alpha^\beta\cdot[u]_\alpha,[v]_\beta\rangle = \langle [u]_\alpha,([I]_\alpha^\beta)^*\cdot[v]_\beta\rangle$$

Ejemplo 8.1.1. *En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual considera las bases ortonormales*

$$c(2)=\{(1,0),(0,1)\}\quad\wedge\quad \alpha=\left\{\frac{1}{\sqrt5}(1,2),\frac{1}{\sqrt5}(-2,1)\right\}$$

entonces

$$[I]_{c(2)}^\alpha = \begin{pmatrix} \langle(1,0),\frac{1}{\sqrt5}(1,2)\rangle & \langle(0,1),\frac{1}{\sqrt5}(1,2)\rangle\\ \langle(1,0),\frac{1}{\sqrt5}(-2,1)\rangle & \langle(0,1),\frac{1}{\sqrt5}(-2,1)\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

Y, usando la notación anterior tenemos que

$$([I]_{c(2)}^\alpha)^* = [I]_\alpha^{c(2)} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

8.2. Operador Adjunto.

Teorema 8.2.1. (*Teorema de Representación de Riesz*) *Si consideremos un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ con producto interno, $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$ y $L\in\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$ entonces existe $v\in\mathbb{V}$ tal que $L(w)=\langle w,v\rangle\quad(\forall w, w\in\mathbb{V})$.*

En efecto

(1) *Como $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{V}$ entonces cada $w\in\mathbb{V}$, se escribe de forma única como*

$$w=\sum_{i=1}^n\langle w,v_i\rangle v_i$$

(2) *Luego, aplicando la forma lineal L a cada $w\in\mathbb{V}$ tenemos que*

$$L(w) = L\left(\sum_{i=1}^n\langle w,v_i\rangle v_i\right)=\sum_{i=1}^n\langle w,v_i\rangle L(v_i) = \begin{pmatrix}\langle w,v_1\rangle & \langle w,v_2\rangle & \cdots & \langle w,v_n\rangle\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}L(v_1)\\ L(v_2)\\ \vdots\\ L(v_n)\end{pmatrix}$$

(3) *Así que, si definimos* $v=\sum_{i=1}^{n}\overline{L(v_i)}\,v_i$ *entonces usando la identidad de encima, sigue que*

$$L(w) \;=\; \begin{pmatrix} \langle w,v_1\rangle & \langle w,v_2\rangle & \cdots & \langle w,v_n\rangle \end{pmatrix}\cdot \overline{\begin{pmatrix} \overline{L(v_1)} \\ \overline{L(v_2)} \\ \vdots \\ \overline{L(v_n)} \end{pmatrix}} = \langle w,v\rangle$$

(4) *Finalmente, supongamos que* v *no es único, es decir, existe* $v'\in\mathbb{V}$ *tal que* $L(w)=\langle w,v'\rangle$ $(\forall w, w\in\mathbb{V})$ *entonces usando la técnica usual cuando hay producto interno obtenemos que,*

$$\begin{aligned}\langle v-v', v-v'\rangle &= \langle v,v\rangle-\langle v,v'\rangle-\langle v',v\rangle+\langle v',v'\rangle\\ &= L(v)-L(v)-L(v')+L(v')\\ &= 0\end{aligned}$$

Por tanto, $v=v'$, *y* v *es único con esta propiedad.*

Corolario 8.2.2. *Sean* V *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial con producto interno,* $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ *una base ortonormal de* $\mathbb{V}$ *y* $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ *entonces existe un único operador* $T^\star$ *de* $\mathbb{V}$ *tal que satisface la ecuación vectorial.*

$$\langle T(w),u\rangle=\langle w,T^\star(u)\rangle \tag{24}$$

En efecto

Como queremos aplicar el teorema de representación de Riesz (8.2.1) *entonces debemos construir una forma lineal, y para ello procedemos como sigue. Para cada* $u\in\mathbb{V}$, *definimos*

$$\begin{aligned}\varphi_u \;:\; \mathbb{V} &\longmapsto \mathbb{K}\\ w &\longmapsto \varphi_u(w)=\langle T(w),u\rangle\end{aligned}$$

entonces

(1) $\varphi_u\in\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$, $(\forall u; u\in\mathbb{V})$, *pues,*

- $\varphi_u(w_1+w_2)=\langle T(w_1+w_2),u\rangle=\langle T(w_1)+T(w_2),u\rangle=\langle T(w_1),u\rangle+\langle T(w_2),u\rangle=\varphi_u(w_1)+\varphi(w_2)$
- $\varphi_u(\lambda w)=\langle T(\lambda w),u\rangle=\langle \lambda T(w),u\rangle=\lambda\langle T(w),u\rangle=\lambda\varphi_u(w)$

(2) *Como* $\varphi_u\in\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$ *entonces por una aplicación directa del teorema de representación de Riesz existe "para cada* $u\in\mathbb{V}$ *un único* $v\in\mathbb{V}$ *tal que* $\varphi_u(w)=\langle w,v\rangle$*". es decir tenemos por una parte,*

$$\langle T(w),u\rangle \;=\; \langle w,v\rangle$$

(3) *Por otra parte, de la lectura "para cada* $u\in\mathbb{V}$ *un único* $v\in\mathbb{V}$ *tal que* $\varphi_u(w)=\langle w,v\rangle$*", sigue que tenemos bien definida una función* $T^*:\mathbb{V}\longmapsto\mathbb{V}$ *tal que* $T^*(u)=v$. *Es decir*

$$T^*(u)=v\Longleftrightarrow \varphi_u(w)=\langle T(w),u\rangle=\langle w,v\rangle=\langle w,T^*(u)\rangle$$

Así que,

$$\langle T(w),u\rangle=\langle w,T^*(u)\rangle$$

(4) *En particular, para el operador* T

$$T(v_i)=\sum_{j=1}^{n}\langle T(v_i),v_j\rangle v_j \quad (1\le i\le n)\Longrightarrow [T]_\alpha^\alpha=\left(\langle T(v_i),v_j\rangle\right)^t\in\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$$

Y para T^* *tenemos que,*

$$
\begin{aligned}
T^\star(v_i) &= \sum_{j=1}^{n}\langle T^\star(v_i), v_j\rangle v_j \quad (1\le i\le n)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\overline{\langle v_j, T^\star(v_i)\rangle} v_j \quad (1\le i\le n)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\overline{\langle T(v_j), v_i\rangle} v_j \quad (1\le i\le n)
\end{aligned}
$$

Así que

$$[T^\star]_\alpha^\alpha = \left(\overline{[T]_\alpha^\alpha}\right)^t$$

(5) *Finalmente, si β otra base ortonormal de $\mathbb{V}$ entonces*

$$
\begin{aligned}
[T^\star]_\beta^\beta &= [I]_\alpha^\beta\,[T^\star]_\alpha^\alpha\,[I]_\beta^\alpha\\
&= [I]_\alpha^\beta\left(\overline{[T]_\alpha^\alpha}\right)^t[I]_\beta^\alpha\\
&= \left([I]_\beta^\alpha\right)^t\left(\overline{[T]_\alpha^\alpha}\right)^t\left([I]_\alpha^\beta\right)^t\\
&= \left([I]_\alpha^\beta\,\overline{[T]_\alpha^\alpha}\,[I]_\beta^\alpha\right)^t\\
&= \left(\overline{[T]_\beta^\beta}\right)^t
\end{aligned}
$$

Definición 8.2.3. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ entonces llamaremos operador adjunto de T al único operador $T^\star$ de V que satisface la ecuación $\langle T(w), u\rangle = \langle w, T^*(u)\rangle$*

Ejemplo 8.2.4. *Sea $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ tal que $T(1,0)=(1+i,2)$ y $T(0,1)=(i,i)$ entonces*

$[T]_{c(2)}^{c(2)} = \begin{pmatrix} 1+i & i\\ 2 & i\end{pmatrix}$ *y* $[T^\star]_{c(2)}^{c(2)} = \begin{pmatrix} 1-i & 2\\ -i & -i\end{pmatrix}$

Ejemplo 8.2.5. *Si $[T]_{c(3)}^{c(3)} = (a_{ks})\in\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(3)$ tal que $a_{ks}=i^{k+s}$ entonces $T^\star$ es diagonalizable.*

En efecto

(1) *Como, $[T]_{c(3)}^{c(3)} = (i^{k+s})$ entonces*

$$[T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} -1 & -i & 1\\ -i & 1 & i\\ 1 & i & -1\end{pmatrix} \;\; y \;\; [T^\star]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} -1 & i & 1\\ i & 1 & -i\\ 1 & -i & -1\end{pmatrix}$$

(2) *Ahora calculamos los valores propios de $T^\star$, vía el polinomio característico $P_{T^\star}(\lambda)$.*

$$
\begin{aligned}
P_{T^\star}(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} (\lambda+1) & -i & -1 \\ -i & (\lambda-1) & i \\ -1 & i & (\lambda+1) \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} (\lambda+1) & -i & -1 \\ 0 & \lambda & -i\lambda \\ -1 & i & (\lambda+1) \end{pmatrix} \\
&= (\lambda+1)[\lambda(\lambda+1)-\lambda]-[-\lambda+\lambda] \\
&= \lambda^2(\lambda+1)
\end{aligned}
$$

Luego, los valores propios de $T^\star$ son $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$

(3) *Aplicando ahora el criterio del polinomio minimal tenemos que,*

$$
[T^\star]_{c(3)}^{c(3)}\left([T^\star]_{c(3)}^{c(3)} + I_3\right) = \begin{pmatrix} -1 & i & 1 \\ i & 1 & -i \\ 1 & -i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ i & 2 & -i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$T^\star$ es diagonalizable

(4) *Para determinar la base que diagonaliza la matriz $[T^\star]_{c(3)}^{c(3)}$, usemos el procedimiento,*

$$
\begin{aligned}
v \in \left(\mathbb{C}^3\right)_\lambda &\iff v \in \mathbb{C}^3 \wedge T^\star(v) = \lambda v \\
&\iff v = [(x,y,z)]_{c(3)} \quad \wedge \quad [T^\star]_{c(3)}^{c(3)}[(x,y,z)]_{c(3)} = [(\lambda x, \lambda y, \lambda z]_{c(3)} \\
&\iff v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{array}{rcrcrcl|} -x & + & iy & + & z & = & \lambda x \\ ix & + & y & - & iz & = & \lambda y \\ x & - & iy & - & z & = & \lambda z \\ \hline \end{array} \qquad (\star)
\end{aligned}
$$

(a) *En particular;*

$$
\begin{aligned}
v \in \left(\mathbb{C}^3\right)_0 &\iff v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{array}{rcrcrcl|} -x & + & iy & + & z & = & 0 \\ ix & + & y & - & iz & = & 0 \\ x & - & iy & - & z & = & 0 \\ \hline \end{array} \\
&\iff v \in \langle\{(1,-i,0),(0,i,1)\}\rangle
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\left(\mathbb{C}^3\right)_0 = \langle\{(1,-i,0),(0,i,1)\}\rangle
$$

(b) *Analogamente,*

$$
\begin{aligned}
v \in \left(\mathbb{C}^3\right)_{-1} &\iff v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{array}{rcrcrcl|} -x & + & iy & + & z & = & -x \\ ix & + & y & - & iz & = & -y \\ x & - & iy & - & z & = & -z \\ \hline \end{array} \\
&\iff v \in \langle\{(i,1,-i)\}\rangle
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\left(\mathbb{C}^3\right)_{-1} = \langle\{(i,1,-i)\}\rangle
$$

Así, la base de diagonalización es

$$
\alpha = \{(1,-i,0),(0,i,1),(i,1,-i)\}
$$

8.3. Propiedades del Operador Adjunto. Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ entonces usando el teorema de representación (se transforma ya en una técnica), podemos verificar las siguientes propiedades:

Propiedad 8.3.1. $(T^\star)^\star = T$

En efecto

- *Por una parte,* $\langle T^*(w), u\rangle = \langle w, T^{**}(u)\rangle$
- *Y por otra parte,* $\langle T^*(w), u\rangle = \overline{\langle u, T^*(w)\rangle} = \overline{\langle T(u), w\rangle} = \langle w, T(u)\rangle$
- *Finalmente, si definimos* $\varphi_u^*(w) = \langle T^*(w), u\rangle$ *entonces* $\varphi_u^* \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$, *así que una nueva aplicación del teorema de representación nos permite decir que,* $T^{**}(u) = T(u)$ *para cada* $u \in \mathbb{V}$, *por tanto* $T^{**} = T$

Propiedad 8.3.2. $(T + L)^\star = T^\star + L^\star$ *y* $(\lambda \cdot T)^\star = \overline{\lambda} \cdot T^\star$

En efecto

Por una parte,

$\varphi_u(w) = \langle (T+L)(w), u\rangle = \langle w, (T+L)^*(u)\rangle$

Y por otra,

$\varphi_u(w) = \langle (T+L)(w), u\rangle = \langle T(w), u\rangle + \langle L(w), u\rangle = \langle w, T^*(u)\rangle + \langle w, L^*(u)\rangle = \langle w, (T^* + L^*)(u)\rangle$

Así que $(T+L)^*(u) = (T^* + L^*)(u)$ *y entonces* $(T+L)^* = T^* + L^*$

Análogamente,

$\varphi_u(w) = \langle (\lambda T)(w), u\rangle = \langle w, (\lambda T)^*(u)\rangle$ *y,*

$\varphi_u(w) = \langle (\lambda T)(w), u\rangle = \lambda\langle T(w), u\rangle = \lambda\langle w, T^*(u)\rangle = \langle w, \overline{\lambda} \cdot T^*(u)\rangle.$

Así que, $(\lambda T)^*(u) = \overline{\lambda}T^*(u)$, *de donde* $(\lambda T)^* = \overline{\lambda}T^*$

Propiedad 8.3.3. $(T \circ L)^\star = (L)^\star \circ (T)^\star$
En efecto
Por una parte, $\varphi_u(w) = \langle (T \circ L)(w), u\rangle = \langle (w), (T \circ L)^*(u)\rangle$, *y por otra parte,*

$\varphi_u(w) = \langle (T \circ L)(w), u\rangle = \langle T(L(w)), u\rangle = \langle L(w), T^*(u)\rangle = \langle w, L^*(T^*(u)) = \langle w, (L^* \circ T^*)(u))$

Así que, aplicando el teorema de representación tenemos que $(T \circ L)^* = L^* \circ T^*$

Propiedad 8.3.4. *Si* $\widehat{\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)} = \{T^\star \,|\, T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)\}$ *y definimos* $\phi : \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V) \longmapsto \widehat{\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)}$ *tal que* $\phi(T) = T^*$ *entonces* ϕ *es un isomorfismo de grupos con la adición.*

En efecto

- *Del teorema de representación sigue que* ϕ *es una biyección, pues para cada* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ *existe un único* $T^* \in \widehat{\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)}$, *y en particular de la propiedad (8.3.1) de los operadores adjuntos, sigue que*

$\phi(T^*) = T^{**} = T$, *es decir* $\phi^{-1} = \phi$, *luego* ϕ *es una biyección*

- *De la propiedad (8.3.2) de los operadores adjuntos, sigue que* ϕ *es un homomorfismo de grupos, pues* $\phi(T+L) = (T+L)^* = T^* + L^* = \phi(T) + \phi(L)$
- *De la misma propiedad (8.3.2) de los operadores adjuntos,* $\phi(\lambda \cdot T) = \overline{\lambda} \cdot T^*$. *Sigue que, si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *entonces* ϕ *es un isomorfismo de* $\mathbb{R}$ *espacios vectoriales.*

Propiedad 8.3.5. $T(\mathbb{W}) \subset \mathbb{W} \Longrightarrow T^\star(\mathbb{W}^\perp) \subset \mathbb{W}^\perp, \ (\forall\, \mathbb{W}, \mathbb{W} \leq \mathbb{V})$.

En efecto

$$v \in W^\perp \Rightarrow \langle v, T(w)\rangle = 0\ (\forall w; w \in W) \Longrightarrow \langle T^\star(v), w\rangle = 0\ (\forall w; w \in W) \Longrightarrow T^\star(W^\perp) \subset W^\perp$$

Propiedad 8.3.6. λ *valor propio de* T *entonces* $\overline{\lambda}$ *valor propio de* T^*

En efecto

Si $T(v) = \lambda v$ *entonces por una parte,* $\langle T(v), u\rangle = \langle \lambda v, u\rangle = \lambda\langle v, u\rangle = \langle v, \overline{\lambda}\, u\rangle$, *y por otra parte,* $\langle T(v), u\rangle = \langle v, T^*(u)\rangle$. *Así* $T^*(u) = \overline{\lambda}\, u$

Propiedad 8.3.7. T *diagonalizable* $\Longrightarrow T \circ T^\star = T^\star \circ T$

En efecto

Si T *es diagonalizable entonces existe una base ortonormal* α *de vectores propios de* V *tal que*

- $[T]_\alpha^\alpha = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\} \Longrightarrow [T^\star]_\alpha^\alpha = diag\{\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \dots, \overline{\lambda}_s\}$
- *En particular,* $T \circ T^\star = T^\star \circ T$

8.4. Operador Hermitiano y Autoadjunto. Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno entonces ¿bajo que condiciones $T \in \mathbb{L}_\mathbb{K}(\mathbb{V})$ tiene un valor propio real?. Iniciamos el estudio con la siguiente,

Definición 8.4.1. *Sea* $(V, \langle,\rangle)$ *tal que* $\dim_\mathbb{K}(V) = n$ *y* $T \in \mathbb{L}_\mathbb{K}(V)$. T *será llamado un operador autoadjunto o hermitiano si* $T = T^\star$. *Para fijar ideas, diremos que* T *es autoadjunto si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *y que* T *es hermitiano si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Ejemplo 8.4.2. *Consideremos* $T \in Ł_\mathbb{C}(\mathbb{C}^2)$ *tal que* $T(x,y) = (5x + (1+i)y, (1-i)x + 2y)$ *entonces*

(1) $[T]_{c(2)}^{c(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow P_T(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-5 & 1+i \\ 1-i & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-2) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 8.$

Así los valores propios de T *son* $\lambda = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-32}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{17}}{2} \in \mathbb{R}$, *y* T *es diagonalizable.*

(2) $[T^*]_{c(2)}^{c(2)} = \overline{\begin{pmatrix} 5 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}^t} = \overline{\begin{pmatrix} 5 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} = [T]_{c(2)}^{c(2)}$

(3) *Es decir* $T = T^*$ *y* T *es un operador hermitiano. En particular* $T \circ T^* = T^* \circ T$

Ejemplo 8.4.3. *Sea $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (-y,x)$ entonces*

(1) *Es claro que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$*

(2) *Para verificar si T es diagonalizable, determinamos sus valores propios y como*

$[T]_{c(2)}^{c(2)} = \begin{pmatrix} [T(1,0)]_{c(2)} & [T(0,1)]_{c(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *entonces*
$P_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0 \quad (\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R}),$ *y*
Luego, T no tiene ningún valor propio real y por tanto no es diagonalizable

(3) *Ahora podemos calcular directamente T^**

En primer lugar, calculamos T^* en la base canónica.

$$\begin{aligned} T^*(1,0) &= \langle T^*(1,0),(1,0)\rangle(1,0) + \langle T^*(1,0),(0,1)\rangle(0,1) \\ &= \langle (1,0),T(1,0)\rangle(1,0) + \langle (1,0),T(0,1)\rangle(0,1) \\ &= \langle (1,0),(0,1)\rangle(1,0) + \langle (1,0),(-1,0)\rangle(0,1) \\ &= (0,-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^*(0,1) &= \langle T^*(0,1),(1,0)\rangle(1,0) + \langle T^*(0,1),(0,1)\rangle(0,1) \\ &= \langle (0,1),T(1,0)\rangle(1,0) + \langle (0,1),T(0,1)\rangle(0,1) \\ &= \langle (0,1),(0,1)\rangle(1,0) + \langle (0,1),(-1,0)\rangle(0,1) \\ &= (1,0) \end{aligned}$$

Ahora, calculamos T^* en el espacio total

$$\begin{aligned} T^*(x,y) &= T^*(x(1,0)+y(0,1)) \\ &= xT^*(1,0) + yT^*(0,1) \\ &= x(0,-1) + y(1,0) \\ &= (y,-x) \end{aligned}$$

Finalmente, verificamos la definición de T^*.

$$\langle T(x,y),(u,v)\rangle = \langle (-y,x),(u,v)\rangle = vx - uy$$

Y,

$$\langle (x,y),T^*(u,v)\rangle = \langle (x,y),(v,-u)\rangle = vx - uy$$

Así que,

$$\langle T(x,y),(u,v)\rangle = \langle (x,y),T^*(u,v)\rangle$$

En particular,

$$\begin{aligned} (T^* \circ T)(x,y) = T^*(T(x,y)) = T^*(-y,x) = (x,y) \\ (T \circ T^*)(x,y) = T(T^*(x,y)) = T(y,-x) = (x,y) \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$[T^*]_{c(2)}^{c(2)} \cdot [T]_{c(2)}^{c(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *y*

$$[T]_{c(2)}^{c(2)} \cdot [T^*]_{c(2)}^{c(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) *Luego, T no es un operador autoadjunto*

Ejemplo 8.4.4. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ entonces*

$$U = T + T^* \Longrightarrow U^* = (T + T^*)^* = T^* + (T^*)^* = T^* + T = U$$

8.5. Propiedades de los Operadores Hermitianos y Autoadjuntos. En esta sección daremos respuesta a la pregunta: ¿Bajo que condiciones $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ tiene un valor propio real?
Supongamos entonces que $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ tal que $T = T^*$

Propiedad 8.5.1. $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$

En efecto

Una tal propiedad sigue de las propias definiciones, pues,

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle = \langle u, T(v)\rangle$$

Propiedad 8.5.2. *Si λ es valor propio de T entonces $\lambda \in \mathbb{R}$*

En efecto

El resultado sigue de la propiedad (8.3.6), y del hecho que $T = T^*$

Propiedad 8.5.3. *Sean λ_1 y λ_2 valores propios de T y V_{λ_1} y V_{λ_2} los correspondientes subespacios propios entonces*

$$u \in V_{\lambda_1}; v \in V_{\lambda_2} \wedge \lambda_1 \neq \bar{\lambda}_2 \quad \Longrightarrow \quad \langle u, v\rangle = 0$$

En efecto

La idea es componer correctamente la siguiente información

- $u \in \mathbb{V}_{\lambda_1} \Longleftrightarrow u \in \mathbb{V} \wedge T(u) = \lambda_1 u$
- $v \in \mathbb{V}_{\lambda_2} \Longleftrightarrow v \in \mathbb{V} \wedge T(v) = \lambda_2 v$
- $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$

Entonces componiendo lo anterior, tenemos que

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle \Longleftrightarrow \langle \lambda_1 u, v\rangle = \langle u, \lambda_2 v\rangle \Longleftrightarrow \lambda_1 \langle u, v\rangle = \bar{\lambda}_2 \langle u, v\rangle \Longleftrightarrow (\lambda_1 - \bar{\lambda}_2) \langle u, v\rangle = 0_V$$

Y, como $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_2$ entonces $\langle u, v\rangle = 0$

Propiedad 8.5.4. *T posee un valor propio*

En efecto

El polinomio característico $P_T(\lambda) = \det(\lambda I_n - [T]_{\alpha}^{\alpha}) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}[\lambda]$ y entonces posee una raíz λ en $\mathbb{C}$, y además de la propiedad (8.5.2) sigue que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propiedad 8.5.5. *Existe una base ortonormal, formada por vectores propios de T, esto es, T es diagonalizable*

En efecto

(1) *Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de T, que existe por la propiedad (8.5.4) y sea $v \in \mathbb{V}$ su correspondiente vector propio, es decir, $T(v) = \lambda v$*

(2) *Si llamamos $u_1 = \dfrac{v}{||v||}$ entonces $T(u_1) = \lambda u_1$ y $\|u_1\| = 1$, y si $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = 1$ $\mathbb{V}$ posee una base ortonormal de vectores propios de T y en particular T es diagonalizable.*

(3) *Haremos Inducción Matemática sobre $n = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$, y para ello consideraremos la siguiente Hipótesis de inducción.*

H: Si $(\mathbb{U}, \langle,\rangle) \leq (\mathbb{V}, \langle,\rangle)$ tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{U}) \leq n-1$ entonces $\mathbb{U}$ posee una base ortonormal de vectores propios de T

Etapas básicas:

(a) *Si $\mathbb{W} = \langle\{u_1\}\rangle$ entonces $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$*

(b) *De la propiedad (8.3.5), tenemos que $T(\mathbb{W}) \subset \mathbb{W} \Longrightarrow T^{\star}(\mathbb{W}^{\perp}) \subset \mathbb{W}^{\perp}$*

(c) *Como $T = T^{\star}$ entonces $T(\mathbb{W}^{\perp}) \subset \mathbb{W}^{\perp}$ y esto permite definir la transformación lineal restricción de T.*

$$\begin{array}{rcll} \widehat{T} = T|_{\mathbb{W}^{\perp}} & : \mathbb{W}^{\perp} & \longmapsto & \mathbb{W}^{\perp} \\ & v & \longmapsto & \widehat{T}(v) = T(v) \end{array}$$

(d) *Como $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}^{\perp}) = n-1 < n$ entonces la hipótesis de Inducción H aplica, y $\mathbb{W}^{\perp}$ posee una base ortonormal de vectores propios de $\widehat{T}$, digamos $\beta = \{u_2, u_3, \dots, u_n\}$ y finalmente de $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$, sigue que $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es una base ortonormal de vectores propios de T.*

8.6. Operador Unitario.

Definición 8.6.1. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, $n \in \mathbb{N}$ y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. T es un operador Unitario si y sólo si*

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

Ejemplo 8.6.2. *Del ejemplo 8.4.3 sabemos que si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tal que $T(x,y) = (-y,x)$ entonces podemos verificar directamente que*

(1) $\langle T(x_1,y_1), T(x_2,y_2)\rangle = \langle(-y_1,x_1),(-y_2,x_2)\rangle = y_1y_2 + x_1x_2 = \langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle$, *es decir T es un operador unitario*

(2) $T^*(x,y) = (y,-x)$ *es el operador adjunto de T y $(T^* \circ T)(x,y) = (x,y)$ y $(T \circ T^*)(x,y) = (x,y)$, es decir $T^{-1} = T^*$*

(3) $\|T(x,y)\|^2 = \langle T(x,y), T(x,y)\rangle = \langle(-y,x),(-y,x)\rangle = x^2 + y^2 = \|(x,y)\|^2$

Lema 8.6.3. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, $n \in \mathbb{N}$ y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Si T es un operador Unitario entonces T es un isomorfismo, y $T^{-1} = T^*$*

En efecto

Aplicando el teorema de representación de Riesz 8.2.1*, la definición de operador unitario, y el teorema de la dimensión tenemos*

- *En primer lugar,*

$$\left.\begin{array}{rcl}\langle T(u),T(v)\rangle & = & \langle u,v\rangle\\ \langle T(u),T(v)\rangle & = & \langle u,T^*(T(v))\rangle\end{array}\right\}\Longrightarrow T^*(T(v))=v$$

- *Es decir, T es inyectiva y por el teorema de la dimensión es sobreyectiva. Análogamente T^* es sobreyectiva y por el teorema de la dimensión inyectiva. Así que T es un isomorfismo, y $T^{-1}=T^*$*

Lema 8.6.4. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(V)=n$, $n\in\mathbb{N}$ y $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Si T es un isomorfismo y $T^{-1}=T^*$ entonces T es un operador unitario*

En efecto

Para cada $u\in\mathbb{V}$ y $v\in\mathbb{V}$ tenemos que $\langle T(u),T(v)\rangle=\langle u,T^*(T(v))\rangle=\langle u,T^{-1}(T(v))\rangle=\langle u,v\rangle$. Luego T es un operador unitario

Lema 8.6.5. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(V)=n$, $n\in\mathbb{N}$ y $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. T operador unitario si y sólo si $\|T(u)\|=\|u\|$*

En efecto

Si T es unitario entonces para cada $u\in\mathbb{V}$ y $v\in\mathbb{V}$ tenemos que $\langle T(u),T(v)\rangle=\langle u,v\rangle$. En particular, para cada $u\in\mathbb{V}$ $\langle T(u),T(u)\rangle=\langle u,u\rangle$, así que

$$\|T(u)\|^2=\langle T(u),T(u)\rangle=\langle u,u\rangle=\|u\|^2$$

Recíprocamente,

En primer lugar observamos que T es inyectiva, y por ende como consecuencia del teorema de la dimensión un isomorfismo pues, si suponemos que $u\in\ker(T)$ entonces $u\in\mathbb{V}\wedge T(u)=0_{\mathbb{V}}$, y

$$0=\|T(u)\|^2=\|u\|^2=\langle u,u\rangle\Longrightarrow u=0_{\mathbb{V}}$$

En segundo lugar,

$$\|T(u)\|^2=\|u\|^2\Longrightarrow\langle T(u),T(u)\rangle=\langle u,u\rangle\Longrightarrow T^*(T(u))=u\Longrightarrow T^{-1}=T^*$$

Lema 8.7. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(V)=n$, $n\in\mathbb{N}$ y $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Si T es un operador unitario y $\lambda\in\mathbb{K}$ es un valor propio de T entonces $|\lambda|=1$*

En efecto

Si $\lambda\in\mathbb{K}$ es un valor propio de T entonces $T(v)=\lambda v$. Así que

$$\left.\begin{array}{rcl}\langle T(v),T(v)\rangle & = & \langle v,v\rangle\\ \langle T(v),T(v)\rangle & = & \langle\lambda v,\lambda v\rangle\end{array}\right\}\Longrightarrow\langle v,v\rangle=\langle\lambda v,\lambda v\rangle\Longrightarrow\langle v,v\rangle=\lambda\overline{\lambda}\langle v,v\rangle\Longrightarrow|\lambda|=1$$

9. Ejercicios Propuestos

(1) Si $\varphi \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tal que $\varphi(x, y, z) = 2x + 3y - z$. Usando el teorema 8.2.1, (teorema de representación de Riesz), y el producto interno usual de $\mathbb{R}^3$. Determine $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) = \langle (x, y, z), u \rangle$

(2) Si $\varphi \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$ tal que $\varphi(x, y, z) = x - i(4z - 6y)$. Usando el teorema 8.2.1, (teorema de representación de Riesz), y el producto interno usual de $\mathbb{C}^3$. Determine $u \in \mathbb{C}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) = \langle (x, y, z), u \rangle$

(3) Si $\varphi \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$ tal que $\varphi(p(x)) = p(0) - 2p'(0)$. Usando el teorema 8.2.1, (teorema de representación de Riesz), y el producto interno de $\mathbb{R}_2[x]$, definido por $\langle p(x), q(x) \rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x) \cdot q(x)\ dx$. Determine $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $\varphi(p(x)) = \langle p(x), q(x) \rangle$

(4) Si $\varphi \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$ tal que $\varphi(p(x)) = p(0) - 2p'(0)$. Usando el teorema 8.2.1, (teorema de representación de Riesz), y el producto interno de $\mathbb{R}_2[x]$, definido por $\langle p(x), q(x) \rangle = p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2)$, donde $p(x) = a_0 + a_x + a_2x^2$ y $q(x) = b_0 + b_x + b_2x^2$. Determine $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $\varphi(p(x)) = \langle p(x), q(x) \rangle$

(5) Si $T : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 - a_2x + a_0x^2$ entonces respecto del producto interno $\langle p(x), q(x) \rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x) \cdot q(x)\ dx$

- Determine T^*
- Muestre que $(\ker(T))^\perp = \operatorname{Img}(T^*)$
- Muestre que T^* es un isomorfismo y que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

(6) Si $T : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x$ entonces respecto del producto interno $\langle p(x), q(x) \rangle = p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2)$, donde $p(x) = a_0 + a_x + a_2x^2$ y $q(x) = b_0 + b_x + b_2x^2$

- Determine T^*
- Muestre que $(\ker(T))^\perp = \operatorname{Img}(T^*)$

(7) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, $n \in \mathbb{N}$ y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$

- Demuestre que $(\ker(T))^\perp = \operatorname{Img}(T^*)$
- Concluya que: Si T es un isomorfismo entonces T^* es un isomorfismo y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

(8) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{C}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$, $n \in \mathbb{N}$ y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V})$. Si $T \circ T^* = T^* \circ T$ entonces demuestre que $\ker(T) = \ker(T^*)$ e $\operatorname{Img}(T) = \operatorname{Img}(T^*)$

(9) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{C}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$, $n \in \mathbb{N}$ y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V})$. Demuestre que si

- T autoadjunto entonces $\|T(u) \pm iu\|^2 = \|T(u)\|^2 + \|u\|^2$
- T autoadjunto entonces $\langle T(u), u \rangle \in \mathbb{R}$ $(\forall u; u \in \mathbb{V})$
- $\langle T(u), u \rangle = 0$ $(\forall u; u \in \mathbb{V})$ entonces $T = 0$
- $\langle T(u), u \rangle \in \mathbb{R}$ $(\forall u; u \in \mathbb{V})$ entonces $T = T^*$

Bibliografía

[1] Bello, I. "Álgebra Elemental ", Brooks/Cole Publishing Company 1999.

[2] Bobadilla, G. Labarca R. "Cálculo 1 ", Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago 2007.

[3] Boldrini, J. Rodriguez, S. Figueiredo, V. Wetzler, H. "Álgebra Linear", Editora Harper & Row do Brasisl Ltda, 1984.

[4] Fraleigh J. "Álgebra Abstracta "Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

[5] Grimaldi, R. "Matemáticas Discretas y Combinatorias ", Addison Wesley 1997.

[6] Gustafson, R. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[7] Kaufmann, J. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 2000

[8] Santander, R. "Álgebra Elemental y superior", Universidad de Santiago 2004

[9] Santander, R. "Álgebra Lineal", Universidad de Santiago 2004

[10] Santander, R. "Un Segundo curso de Algebra Lineal"

[11] Swokowski, E. "Álgebra y trigonometría ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[12] Zill, D. " Álgebra y trigonometría ", Mc Graw Hill 1999

Indice Alfabético