Contenidos

CAPITULO 4

Clasificación de Espacios Vectoriales

El trabajo solidario es lo único que hace humano al ser humano

Si Consideramos dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ entonces según lo que hemos discutido en el Capitulo Espacios Vectoriales, estos espacios sólo tienen sentido si en cada uno de ellos se define claramente las reglas del juego, es decir se opta por una base que permita representar en forma finita y precisa cada uno de los vectores de ese espacio como una combinación lineal, o como una imagen matricial usando "la función corchete" correspondiente en su espacio coordenado de matrices.

En concreto tenemos para $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y para $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ una base de $\mathbb{W}$ la situación:

$$
\begin{tikzcd}
v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \arrow[dr, phantom, "\in" sloped] & & & w = \sum_{i=1}^{m} c_i w_i \arrow[dl, phantom, "\ni" sloped] \\
& (V, \alpha) \arrow[r, dotted, "?"] \arrow[d] & (\mathbb{W}, \beta) \arrow[d] & \\
& \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \arrow[r, dotted, "?"] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m \times 1) & \\
[v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] & & & [w]_\beta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \arrow[ul, phantom, "\ni" sloped]
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

Figura 1: Cuadro 1 de mando para la gestión externa

En el diagrama (1) vemos que el conector que necesitamos, más que llevar vectores en vectores, debe llevar combinaciones lineales de $\mathbb{V}$ en combinaciones lineales de $\mathbb{W}$. Respecto de esto, tenemos dos antecedentes, que podemos exhibir:

(1) Para cualquier base α del espacio vectorial $\mathbb{V}$

   (a) $[u + v]_\alpha = [u]_\alpha + [v]_\alpha$, y

   (b) $[\lambda \cdot u]_\alpha = \lambda [u]_\alpha$ para $\lambda \in \mathbb{K}$.

(2) $[I]_{\alpha_1}^{\alpha_2}[u]_{\alpha_1} = [u]_{\alpha_2}$

Es claro que lo anterior es gestión interna, y lo que queremos hacer ahora es gestión externa entre espacios vectoriales, esta se realizará a través de las aplicaciones naturales entre ellos, las que son conocidas como transformaciones lineales. Esencialmente lo que se desea es clasificar los espacios vectoriales, respecto del único criterio que hasta ahora hemos desarrollado, y que es la dimensión del espacio, para ello será necesario:

(1) Construir una transformación lineal sujeta a condiciones entre dos espacios vectoriales de dimensión finita
(2) Verificar si una transformación lineal es un isomorfismo de espacios vectoriales
(3) Aplicar el teorema de la dimensión, para filtrar la viabilidad de que dos espacios sean o no isomorfos
(4) Construir la representación matricial de una transformación lineal
(5) Relacionar el concepto de inversión matricial e isomorfismo de una transformación lineal.

1. Transformaciones Lineales: La Herramienta

Definición 1.1. *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{W}$ una función. T se llamará una transformación lineal entre los $\mathbb{K}$ espacios vectoriales $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ si verifica las siguientes propiedades*

(1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ *para cada* $u \in \mathbb{V}$ *y* $v \in \mathbb{V}$
(2) $T(\lambda \cdot u) = \lambda T(u)$ *para cada* $u \in \mathbb{V}$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$

La notación que usaremos para coleccionar estas transformaciones será la siguiente:

$\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = \{T : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{W} \mid T \text{ es una transformación lineal}\}$, *y*

$\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$

Ejemplo 1.1.1. *Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x - y + z, x + z)$ entonces $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$*

En efecto, en concordancia con la definición podemos ejecutar el siguiente algoritmo o procedimiento de trabajo:

Etapa 1. Introducimos e interpretamos los datos del dominio de T

- $u \in \mathbb{R}^3 \iff u = (u_1, u_2, u_3)$ *donde* $u_i \in \mathbb{R}$ *para* $(i = 1, 2, 3)$
- $v \in \mathbb{R}^3 \iff v = (v_1, v_2, v_3)$ *donde* $v_i \in \mathbb{R}$ *para* $(i = 1, 2, 3)$
- $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \in \mathbb{R}^3$

Etapa 2. Debemos mostrar que $T(u+v) = T(u) + T(v)$

$$
\begin{aligned}
T(u+v) &= T((u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)) \\
&= ((u_1+v_1) - (u_2+v_2) + (u_3+v_3), (u_1+v_1) + (u_3+v_3)) \\
&= (u_1+v_1-u_2-v_2+u_3+v_3, u_1+v_1+u_3+v_3) \\
&= ([u_1-u_2+u_3] + [v_1-v_2+v_3], [u_1+u_3] + [v_1+v_3]) \\
&= (u_1-u_2+u_3, u_1+u_3) + (v_1-v_2+v_3, v_1+v_3) \\
&= T((u_1,u_2,u_3)) + T((v_1,v_2,v_3)) \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}
$$

Etapa 3. Finalmente debemos mostra que $T(\lambda u) = \lambda T(u)$

$$\begin{aligned} T(\lambda u) &= T((\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)) \\ &= (\lambda u_1 - \lambda u_2 + \lambda u_3, \lambda u_1 + \lambda u_3) \\ &= \lambda(u_1 - u_2 + u_3, u_1 + u_3) \\ &= \lambda T((u_1, u_2, u_3)) \\ &= \lambda T(u) \end{aligned}$$

Así que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(, \mathbb{R}^3 \mathbb{R}^2)$

Ejemplo 1.1.2. Construcción teórica de transformaciones lineales *Sean* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$ *dos* $\mathbb{K}$ *espacios vectoriales, donde* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *y sea* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *una base cualquiera de* $\mathbb{V}$ *entonces*

(1) *Cada* $u \in \mathbb{V}$ *se escribe en forma única como* $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$

(2) *Si existiese* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ *entonces debería suceder que:*

$$T(u) = T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \cdots + a_n T(v_n)$$

(3) *Motivados por lo anterior. Si definimos una función* T *a través del siguiente procedimiento:*

(a) $T(v_i) = w_i$*, donde cada* $w_i \in \mathbb{W}$ *es arbitrariamente escogido para* $i = 1, 2, \dots, n$

(b) *Si* $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in \mathbb{V}$ *entonces* $T(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \in \mathbb{W}$
entonces $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

En efecto

(i) *Si* $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in \mathbb{V}$ *y* $v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \in \mathbb{V}$ *entonces* $u + v = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) v_i$*. Así que*

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) w_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i w_i + \sum_{i=1}^{n} b_i w_i = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i T(v_i) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) + T\left(\sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right) \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

(ii) *Sea* $\lambda \in \mathbb{K}$ *entonces para* $u \in \mathbb{V}$*, como encima tenemos que*

$$\begin{aligned} T(\lambda u) &= T\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) w_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) = \lambda T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \\ &= \lambda T(u) \end{aligned}$$

Luego, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ *Esta técnica, se basa en el hecho que es suficiente definir la transformación en una base, y después se "extiende por linealidad"*

2. Ejercicios Propuestos de Transformaciones Lineales

(1) Demuestre que las siguientes funciones son transformaciones líneales:

(i) $T:\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$; tal que $T(x,y,z)=(x+y-z,x-y-z)$

(ii) $T:\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$; tal que $T(x,y)=(x+y,x-y,x-3y)$

(iii) $T:\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$; tal que $T(u)=2u; \qquad u\in\mathbb{R}^n$

(iv) $T:\mathbb{R}_3[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$; tal que $T\left(\sum\limits_{i=0}^{3} a_ix^i\right)=a_2+a_0x-a_1x^2$

(v) $T:\mathbb{R}_{n+1}[x] \longmapsto \mathbb{R}_n[x]$; tal que $T\left(\sum\limits_{i=0}^{n+1} a_ix^i\right)=\sum\limits_{j=0}^{n} ja_jx^j$

(vi) $T:\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$; tal que $T(a_{ij})=(a_{ji})$

3. Propiedades Cualitativas de las Transformaciones Lineales

Sea $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})=n$ entonces

(1) $T(0_{\mathbb{V}})=0_{\mathbb{W}}$

En efecto

$$(T(0_{\mathbb{V}})=T(0_{\mathbb{V}}+0_{\mathbb{V}})=T(0_{\mathbb{V}})+T(0_{\mathbb{V}}))\Longrightarrow T(0_{\mathbb{V}})=0_{\mathbb{W}}$$

(2) T inyectiva $\Longrightarrow n\le\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})$

En efecto

(a) Si $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ entonces $T(\alpha):=\{T(v_1),T(v_2),\dots,T(v_n)\}\subset\mathbb{W}$

(b) $T(\alpha)$ es linealmente independiente o linealmente dependiente en $\mathbb{W}$. Así que verifiquemos cual es su condición

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_iT(v_i)=0_{\mathbb{W}} &\Longrightarrow T\left(\sum_{i=1}^{n} a_iv_i\right)=0_{\mathbb{W}}\\
&\Longrightarrow T\left(\sum_{i=1}^{n} a_iv_i\right)=T(0_{\mathbb{V}}) \quad \text{(Ver (1))}\\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_iv_i=0_{\mathbb{V}} \qquad (T \text{ inyectiva})\\
&\Longrightarrow a_i=0 \quad (\text{ para } i=1,2,\dots,n),\ \text{Pues } \alpha \text{ es linealmente independiente}\\
&\Longrightarrow T(\alpha) \text{ es linealmente independiente en } \mathbb{W}\\
&\Longrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})\ge n
\end{aligned}$$

Es conveniente recordar que la dimensión de un espacio vectorial es el número máximo de vectores linealmente independiente soportado por el espacio

(3) T sobreyectiva $\Longrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})\le n$

En efecto

(a) Como T es sobreyectiva entonces $Img(T) = \mathbb{W}$, es decir

$$w \in \mathbb{W} \implies (\exists u; u \in \mathbb{V}) : T(u) = w \qquad (*)$$

(b) Como $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ entonces podemos invocar la existencia de una base $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{V}$, y entonces retornando a $(*)$ tenemos que

$$\begin{aligned} w \in \mathbb{W} &\iff (\exists u; u \in \mathbb{V}) : \ u = \sum_{i=1}^n a_i v_i \ \wedge \ T\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = w \\ &\iff (\exists u; u \in \mathbb{V}) : \ u = \sum_{i=1}^n a_i v_i \ \wedge \ \sum_{i=1}^n a_i T(v_i) = w \\ &\iff w \in \langle\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}\rangle \end{aligned}$$

Luego $\mathbb{W} = \langle\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}\rangle \implies \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) \leq n$

Es conveniente recordar que la dimensión de un espacio vectorial es el número mínimo de vectores generadores soportado por el espacio

(4) T biyectiva $\implies \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})$

En efecto

$$\left.\begin{array}{lcl} T \text{ inyectiva} & \implies & n \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) \\ T \text{ sobreyectiva} & \implies & \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) \leq n \end{array}\right\} \implies \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})$$

(5) Reciprocamente, supongamos que, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})$ entonces usando la técnica usada en el ejemplo (1.1.2), podemos construir una transformación lineal, y además biyectiva.

En efecto

(a) Sean $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ una base de $\mathbb{W}$

(b) Definamos entonces en la base, y extendamos por linealidad.

$$\left.\begin{array}{rcl} T(v_1) & = & w_1 \\ T(v_2) & = & w_2 \\ & \vdots & \\ T(v_n) & = & w_n \end{array}\right\} \qquad \wedge \qquad T(u) = T\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i w_i \qquad (\text{para cada } u \in \mathbb{V})$$

(c) T es inyectiva, pues si $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ y $v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$ entonces

$$\begin{aligned}
T(u) = T(v) \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = \sum_{i=1}^{n} b_i w_i \\
&\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) w_i = 0_{\mathbb{W}} \\
&\Longrightarrow \quad a_i - b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{(Pues, } \beta \text{ es una base de } \mathbb{W}) \\
&\Longrightarrow \quad a_i = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
&\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \\
&\Longrightarrow \quad u = v
\end{aligned}$$

(d) T es sobreyectiva, pues si $w \in \mathbb{W}$ entonces como β es una base de $\mathbb{W}$ existen únicos escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ tales que $w = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i$. Pero entonces el argumento que sigue es generado por construcción, en el siguiente sentido:

$$w = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i \quad \Longrightarrow \quad w = \sum_{i=1}^{n} c_i T(v_i) \Longrightarrow w = T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\right) \Longrightarrow w \in Img(T)$$

Así que $\mathbb{W} \subset Img(T)$ y siempre $Img(T) \subset \mathbb{W}$, por tanto, $\mathbb{W} = Img(T)$, y T es sobreyectiva

Definición 3.1. *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{W}$ una función. Diremos que T es un isomorfismo de espacios vectoriales si:*

(a) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, *y*

(b) T *es biyectiva*

En tal caso diremos que, $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son isomorfos y lo notaremos como $\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$

Teorema 3.2. (**Primer criterio de clasificación**). *Si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales entonces*

(a) $\mathbb{V} \cong \mathbb{W} \Longrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})$

(b) *Recíprocamente, si $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})$ entonces existe un isomorfismo de espacios vectoriales, esta construcción es estándar, pero depende de las bases*
En efecto

Estos resultados son la formalización de lo discutido, en lo que va, de esta **Sección**

Teorema 3.2.1. *La relación ser isomorfos es una relación de equivalencia en la clase de $\mathbb{K}$ espacios vectoriales.*

En efecto

(a) $\mathbb{V} \cong \mathbb{V}$, *pues la función identidad, $1_{\mathbb{V}} \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ y es biyectiva*

(b) *Si* $\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$ *entonces existe* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ *isomorfismo, y como en particular* T *es biyectiva entonces existe* T^{-1} *definida por* $T^{-1}(w) = v \Longleftrightarrow T(v) = w$ *que es biyectiva, además*

$T^{-1}(w_1 + w_2) = v \Longleftrightarrow T(v) = w_1 + w_2$, *pero como* T *es biyectiva entonces existen* $u_1 \in \mathbb{V}$ *y* $u_2 \in \mathbb{V}$ *tales que*

$$\begin{aligned} T(u_1) = w_1 &\Longleftrightarrow u_1 = T^{-1}(w_1) \\ T(u_2) = w_2 &\Longleftrightarrow u_2 = T^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

Así que,

$$[T(v) = w_1 + w_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2)] \Longrightarrow [v = u_1 + u_2 = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)]$$

Luego, $T^{-1}(w_1 + w_2) = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$

Análogamente,

$T^{-1}(\lambda w) = v \Longleftrightarrow T(v) = \lambda w$, *pero* $T(u) = w$, *pues* T *es sobreyectiva, y entonces*

$$T(v) = \lambda w \Longrightarrow T(v) = \lambda T(u) \Longrightarrow T(v) = T(\lambda u) \Longrightarrow v = \lambda u \Longrightarrow v = \lambda T^{-1}(w)$$

Luego, $T^{-1}(\lambda w) = \lambda T^{-1}(w)$, *y* $T^{-1} \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}, \mathbb{V})$, *y es un isomorfismo y* $\mathbb{W} \cong \mathbb{V}$

(c) *Si* $\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$ *y* $\mathbb{W} \cong \mathbb{U}$ *entonces existen* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ *y* $H \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}, \mathbb{U})$, *isomorfismos que verifican las propiedades:*

$\mathbb{V} \overset{T}{\longmapsto} \mathbb{W} \overset{H}{\longmapsto} U$ *biyectivas entonces* $\mathbb{V} \overset{H\circ T}{\longmapsto} U$ *es biyectiva, y*

(i) $(H \circ T)(u + v) = (H \circ T)(u) + (H \circ T)(v)$, *pues*

$$\begin{aligned} (H \circ T)(u + v) &= H(T(u + v)) \\ &= H(T(u) + T(v)) \\ &= H(T(u)) + H(T(v)) \\ &= (H \circ T)(u) + (H \circ T)(v) \end{aligned}$$

(ii) $(H \circ T)(\lambda u) = \lambda(H \circ T)(u)$, *pues*

$$\begin{aligned} (H \circ T)(\lambda u) &= H(T(\lambda u)) \\ &= H(\lambda T(u)) \\ &= \lambda H(T(u)) \\ &= \lambda(H \circ T)(u) \end{aligned}$$

Así que $(H \circ T) \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{U})$, *y es un isomorfismo y* $\mathbb{V} \cong \mathbb{U}$.

4. Reinterpretación de las Propiedades de las Transformaciones Lineales

Iniciemos el proceso con $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, como $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$ entonces para que T no sea inyectiva basta que exista $u \neq 0_{\mathbb{V}}$ tal que $T(u) = 0_{\mathbb{W}}$, esto motiva preguntar, ¿Cómo controlar la inyectividad desde el interior del espacio vectorial?

Partamos nuestro análisis conjuntando estos elementos que son anulados por la transformación.

Definición 4.1. *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ entonces llamaremos núcleo de T al conjunto*

$$\ker(T) \quad = \quad \{u \in \mathbb{V} \mid T(u) = 0_{\mathbb{W}}\}$$

Podemos enunciar respecto de la definición anterior el siguiente:

Lema 4.1.1. *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ entonces* $\ker(T) \leq \mathbb{V}$

Demostración

(a) Como $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ y $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$ entonces $0_{\mathbb{V}} \in \ker(T)$, y $\ker(T) \neq \emptyset$

(b) Si $u \in \ker(T)$ y $v \in \ker(T)$ entonces $(u + v) \in \ker(T)$.

En efecto

$$\left.\begin{array}{lcl} u \in \ker(T) & \Longleftrightarrow & u \in \mathbb{V} \wedge T(u) = 0_{\mathbb{W}} \\ v \in \ker(T) & \Longleftrightarrow & v \in \mathbb{V} \wedge T(v) = 0_{\mathbb{W}} \end{array}\right\} \Longrightarrow (u + v) \in \mathbb{V} \wedge T(u + v) = T(u) + T(v) = 0_{\mathbb{W}}$$

Así que $(u + v) \in \ker(T)$

(c) Si $u \in \ker(T)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces $\lambda u \in \ker(T)$.

En efecto

$$\begin{array}{lcl} u \in \ker(T) & \Longleftrightarrow & u \in \mathbb{V} \wedge T(u) = 0_{\mathbb{W}} \\ & \Longrightarrow & \lambda u \in \mathbb{V} \wedge T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda 0_{\mathbb{W}} = 0_{\mathbb{W}} \end{array}$$

Así que $\lambda u \in \ker(T)$, y entonces $\ker(T) \leq \mathbb{V}$

Lema 4.1.2. *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ entonces*

$$T \text{ inyectiva} \quad \Longleftrightarrow \quad \ker(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$$

En efecto

Si suponemos que T es inyectiva entonces

$$\begin{array}{lcl} u \in \ker(T) & \Longrightarrow & u \in \mathbb{V} \wedge T(u) = 0_{\mathbb{W}} \\ & \Longrightarrow & u \in \mathbb{V} \wedge T(u) = T(0_{\mathbb{V}}) \\ & \Longrightarrow & u \in \mathbb{V} \wedge u = 0_{\mathbb{V}} \quad (\textit{Pues, } T \textit{ es inyectiva}) \\ & \Longrightarrow & \ker(T) \subset \{0_{\mathbb{V}}\} \end{array}$$

Además, $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ y $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$. Así que $\{0_{\mathbb{V}}\} \subset \ker(T)$, y $\{0_{\mathbb{V}}\} = \ker(T)$

Recíprocamente, si suponemos que $\{0_{\mathbb{V}}\} = \ker(T)$ *y que* $T(u) = T(v)$ *entonces*

$$\begin{aligned} T(u) = T(v) &\Longrightarrow T(u) - T(v) = 0_{\mathbb{W}} \\ &\Longrightarrow T(u) + (-1)T(v) = 0_{\mathbb{W}} \\ &\Longrightarrow T(u) + T((-1)v) = 0_{\mathbb{W}} \\ &\Longrightarrow T(u + (-1)v) = 0_{\mathbb{W}} \\ &\Longrightarrow T(u - v) = 0_{\mathbb{W}} \\ &\Longrightarrow (u - v) \in \ker(T) \\ &\Longrightarrow (u - v) = 0_{\mathbb{V}} \\ &\Longrightarrow u = v \end{aligned}$$

Así que T *es inyectiva.*

Respecto de la imagen de una transformación lineal tenemos el siguiente resultado

Lema 4.1.3. *Sean* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$ *dos* $\mathbb{K}$ *espacios vectoriales y* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ *entonces* $Img(T) \leq \mathbb{W}$

En efecto

(a) $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}} \Longrightarrow 0_{\mathbb{W}} \in Img(T)$. *Así que* $Img(T) \neq \emptyset$

(b) *Si* $w_1 \in Img(T)$ *y* $w_2 \in Img(T)$ *entonces existen por definición,* $v_1 \in \mathbb{V}$ *y* $v_2 \in \mathbb{V}$ *tales que* $T(v_1) = w_1$ *y* $T(v_2) = w_2$*, pero entonces*

$$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) \Longrightarrow (w_1 + w_2) \in Img(T)$$

(c) *Ahora, Si* $w \in Img(T)$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$ *entonces existe* $u \in \mathbb{V}$ *tal que* $T(u) = w$ *, de donde sigue que*

$$\lambda w = \lambda T(u) = T(\lambda u) \Longrightarrow \lambda w \in Img(T)$$

Finalmente, los cálculos anteriores muestran que $Img(T) \leq \mathbb{W}$,

La traducción de las cualidades de una transformación lineal, serán codificadas en el lenguaje del álgebra lineal a través del siguiente fundamental teorema

Teorema 4.2. Teorema de la dimensión *Si* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$ *son dos* $\mathbb{K}$ *espacios vectoriales tal que* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ *con* $n \in \mathbb{N}$, *y* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ *entonces*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = \dim_{\mathbb{K}}(\ker(T)) + \dim_{\mathbb{K}}(Img(T))$$

En efecto

(a) *Si* $\dim_{\mathbb{K}}(\ker(T)) = s$ *entonces* $0 \leq s \leq n$, *y*

(b) *Si* $s = n$, *entonces* $\ker(T) = \mathbb{V}$ *pues,* $\ker(T) \leq \mathbb{V}$. *Así que* $T(u) = 0_{\mathbb{W}} \quad (\forall u; u \in \mathbb{V})$. *Por tanto,* $Img(T) = \{0_{\mathbb{W}}\}$,*y*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n + 0$$

(c) *Si* $s \geq 0$ *entonces a partir de* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ *una base de* $\ker(T)$ *completamos a una base* β *de* $\mathbb{V}$*, como sigue*

$$\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$$

Luego, para cada $u \in \mathbb{V}$ *tenemos que* $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$*, y* $T(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i)$ *de donde sigue que*

$$\begin{aligned} T(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) \quad &\Longrightarrow \quad T(u) = \sum_{i=s+1}^{n} a_i T(v_i), \quad (Pues, T(v_i) = 0_{\mathbb{W}} \text{ para } 1 \leq i \leq s) \\ &\Longrightarrow \quad T(u) \in \langle \{T(v_{s+1}).T(v_{s+2}), \dots, T(v_n)\} \rangle \end{aligned}$$

Luego, $Img(T) = \langle \{T(v_{s+1}).T(v_{s+2}), \dots, T(v_n)\} \rangle$*. Así que* $\dim_{\mathbb{K}}(Img(T)) \leq (n - s)$*.*

Finalmente verifiquemos si $\langle \{T(v_{s+1}).T(v_{s+2}), \dots, T(v_n)\} \rangle$ *es linealmente independiente o dependiente.*

$$\begin{aligned} a_1 T(v_{s+1}) + \dots + a_n T(v_n) = 0_{\mathbb{W}} \quad &\Longrightarrow \quad T(a_1 v_{s+1} + \dots + a_n v_n) = 0_{\mathbb{W}} \\ &\Longrightarrow \quad (a_1 v_{s+1} + \dots + a_n v_n) \in \ker(T) \\ &\Longrightarrow \quad a_1 v_{s+1} + \dots + a_n v_n = 0_{\mathbb{V}} \quad (\dim_{\mathbb{K}}(\ker(T) = s) \\ &\Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \end{aligned}$$

Luego, $\dim_{\mathbb{K}}(Img(T)) = (n - s)$*, y*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\ker(T)) + \dim_{\mathbb{K}}(Img(T)) = s + n - s = n = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$$

Corolario 4.3. *Si* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$ *son dos* $\mathbb{K}$ *espacios vectoriales tal que* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ *con* $n \in \mathbb{N}$*, y* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$
entonces

$$T \text{ inyectiva} \quad \Longleftrightarrow \quad T \text{ sobreyectiva}$$

En efecto

$$\begin{aligned} T \text{ inyectiva} \quad &\Longleftrightarrow \quad \ker(T) = \{0_{\mathbb{V}}\} \\ &\Longleftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}}(\ker(T)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = \dim_{\mathbb{K}}(Img(T)) \\ &\Longleftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) = \dim_{\mathbb{K}}(Img(T)) \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{W} = Img(T) \\ &\Longleftrightarrow \quad T \text{ sobreyectiva} \end{aligned}$$

Después de lo analizado, el diagrama (1) se transforma en:

$$
\begin{tikzcd}
v=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_iv_i \arrow[r, phantom, "\in"] & (V,\alpha) \arrow[r, "T"] \arrow[d] & (\mathbb{W},\beta) \arrow[d] & T(v)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_iw_i \arrow[l, phantom, "\ni"] \\
{[v]_\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \arrow[r, phantom, "\in"] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, dotted, "?"] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times 1) & {[T(v)]_\beta} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \arrow[l, phantom, "\ni"]
\end{tikzcd} \tag{2}
$$

Figura 2: Cuadro 2 de mando para la gestión externa

5. Reinterpretación Operativa de las Transformaciones Lineales

Si consideramos $v \in \mathbb{V}$ entonces $T(v) \in \mathbb{W}$, esto es claro y aparentemente obvio, pero si lo observamos con cuidado podemos obtener sorprendentes resultados:

En efecto

- Si $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_iv_i \in (\mathbb{V},\alpha)$ y $T(v) = w = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_iw_i \in (\mathbb{W},\beta)$ entonces a nivel de coordenadas debemos tener que

$$
[v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \tag{3}
$$

$$
[T(v)]_\beta = [w]_\beta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times 1) \tag{4}
$$

- Por otra parte, usando las propiedades de T tenemos que:

$$
w = T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_iv_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_iT(v_i) \in \mathbb{W} \tag{5}
$$

- Ahora, combinando la información de (4) y (5) obtenemos una nueva y útil ecuación.

$$
[T(v)]_\beta = \left[\sum_{i=1}^{n} a_iT(v_i)\right]_\beta = \sum_{i=1}^{n} a_i[T(v_i)]_\beta \tag{6}
$$

- Como $T(v_i)\in(\mathbb{W},\beta)$, para $(i=1,2,\dots,n)$ entonces sus coordenadas en la base β deben ser de la forma:

$$[T(v_i)]_\beta=\begin{pmatrix}c_{i1}\\c_{i2}\\\vdots\\c_{im}\end{pmatrix}\Longleftrightarrow T(v_i)=\sum_{j=1}^m c_{ij}w_j=c_{i1}w_1+c_{i2}w_2+\cdots+c_{im}w_m \tag{7}$$

- Sustituyendo, (4) y (7) en (6) obtenemos la decisiva relación

$$\underbrace{\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_m\end{pmatrix}}_{[T(v)]_\beta}=a_1\underbrace{\begin{pmatrix}c_{11}\\c_{12}\\\vdots\\c_{1m}\end{pmatrix}}_{[T(v_1)]_\beta}+a_2\underbrace{\begin{pmatrix}c_{21}\\c_{22}\\\vdots\\c_{2m}\end{pmatrix}}_{[T(v_2)]_\beta}+\cdots+a_i\underbrace{\begin{pmatrix}c_{i1}\\c_{i2}\\\vdots\\c_{im}\end{pmatrix}}_{[T(v_i)]_\beta}+\cdots+a_n\underbrace{\begin{pmatrix}c_{n1}\\c_{n2}\\\vdots\\c_{nm}\end{pmatrix}}_{[T(v_n)]_\beta} \tag{8}$$

- Finalmente, realizando las operaciones pertinentes en (8) obtenemos que

$$\underbrace{\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_m\end{pmatrix}}_{[T(v)]_\beta}=\begin{pmatrix}a_1c_{11}+a_2c_{21}+\cdots+a_nc_{n1}\\a_1c_{12}+a_2c_{22}+\cdots+a_nc_{n2}\\\vdots\\a_1c_{1m}+a_2c_{2m}+\cdots+a_nc_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{21}&\dots&c_{n1}\\c_{12}&c_{22}&\cdots&c_{n2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\\c_{1m}&c_{2m}&\cdots&c_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} \tag{9}$$

Es decir tenemos la propiedad fundamental:

$$[T(v)]_\beta\;=\;\begin{pmatrix}[T(v_1)]_\beta & [T(v_2)]_\beta & \cdots & [T(v_n)]_\beta\end{pmatrix}[v]_\alpha \tag{10}$$

Definición 5.1. *Si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})=n$ y $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})=m$, y $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ entonces llamaremos representación matricial de la Transformación lineal T en las bases α y β a la matriz*

$$[T]_\alpha^\beta\;=\;\begin{pmatrix}[T(v_1)]_\beta & [T(v_2)]_\beta & \cdots & [T(v_n)]_\beta\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times n)$$

Ejemplo 5.1.1. *Sea $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ tal que $T(x,y,z)=(x+y+z,x-y+3z)$ y consideremos las bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente*

$$\alpha=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}\ y\ \beta=\{(1,1),(1,-1)\}$$

entonces la observación anterior sugiere el siguiente algoritmo o procedimiento:

Etapa 1. Sabemos que

$$[T]_\alpha^\beta\;=\;\begin{pmatrix}[T(1,1,1)]_\beta & [T(1,1,0)]_\beta & [T(1,0,0)]_\beta\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(2\times3) \tag{11}$$

Etapa 2. Calculamos $[T(x,y,z)]_\beta$, para cualquier $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$!!!

$$
\begin{aligned}
T(x,y,z) = a_1(1,1) + a_2(1,-1) &\iff (x+y+z, x-y+3z) = (a_1+a_2, a_1-a_2)\\
&\iff \left.\begin{array}{rcl} a_1+a_2 &=& x+y+z\\ a_1-a_2 &=& x-y+3z \end{array}\right|\\
&\implies a_1 = x+2z \wedge a_2 = y-z
\end{aligned}
$$

De donde sigue por definición que;

$$
[T(x,y,z)]_\beta = \begin{pmatrix} x & + & 2z\\ y & - & z \end{pmatrix} \tag{12}
$$

Etapa 3. Aplicando la fórmula (12) *en* (11) *tenemos que la matriz pedida es:*

$$
[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Después de esta definición y juntando los resultados anteriores obtenemos un importante lista de poderosas conclusiones:

Propiedad 5.2. *Si* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$ *son dos* $\mathbb{K}$ *espacios vectoriales tal que* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ *y* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) = m$, *y* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ *entonces*

$$
[T]_\alpha^\beta [v]_\alpha = [T(v)]_\beta
$$

En efecto

El resultado sigue de (10) *y de la Definición* (5.1).

Finalmente, el diagrama (1) se completa y se puede representar como sigue:

$$
\begin{tikzcd}
v=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i \arrow[r, phantom, "\in"] & (V,\alpha) \arrow[r, "T"] \arrow[d] & (\mathbb{W},\beta) \arrow[d] & T(v)=\sum\limits_{i=1}^{m} c_i w_i \arrow[l, phantom, "\ni"] \\
{[v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n \end{pmatrix}} \arrow[r, phantom, "\in"] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "{[T]_\alpha^\beta}"] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times 1) & {[T(v)]_\beta = \begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_m \end{pmatrix}} \arrow[l, phantom, "\ni"]
\end{tikzcd} \tag{13}
$$

Figura 3: Cuadro final de mando para la gestión externa

Observación 5.2.1. *La conección expuesta en el diagrama* (13), *entre la teoría y la práctica, siempre hace referencia a las bases* α *y* β *de los espacios vectoriales involucrados, pero en realidad esto no es una restricción sino más bien una holgura.*

En efecto

Supongamos que tenemos las nuevas bases α' y β' de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, respectivamente entonces podemos determinar las nuevas matrices: $[T]_{\alpha'}^{\beta'}$; $[T]_{\alpha}^{\beta'}$; $[T]_{\alpha'}^{\beta}$. ¿Tienen alguna relación entre si esta matrices?.

Para responder utilicemos nuestros diagramas que permiten conectar "la gestión interna con la externa"

♦ *Relación entre $[T]_{\alpha'}^{\beta}$ y $[T]_{\alpha}^{\beta}$*

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{V},\alpha') \arrow[r, "1_{\mathbb{V}}"] \arrow[d, "[\ ]_{\alpha'}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{Gestión interna}"] & (\mathbb{V},\alpha) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "[\ ]_{\alpha}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{Gestión externa}"] & (\mathbb{W},\beta) \arrow[d, "[\ ]_{\beta}"'] \\
\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "[I]_{\alpha'}^{\alpha}"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "[T]_{\alpha}^{\beta}"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times 1)
\end{tikzcd}
$$

Figura 4: $[T]_{\alpha'}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\beta}\cdot [I]_{\alpha'}^{\alpha}$

En este caso; como lo muestra el cuadro encima:

$$T = T\circ 1_{\mathbb{V}} \Longrightarrow [T]_{\alpha'}^{\beta} \;=\; [T]_{\alpha}^{\beta}\cdot [I]_{\alpha'}^{\alpha}$$

♦ *Relación entre $[T]_{\alpha}^{\beta'}$ y $[T]_{\alpha}^{\beta}$*

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{V},\alpha) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "[\ ]_{\alpha}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{Gestión externa}"] & (\mathbb{W},\beta) \arrow[r, "1_{\mathbb{W}}"] \arrow[d, "[\ ]_{\beta}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{Gestión interna}"] & (\mathbb{W},\beta') \arrow[d, "[\ ]_{\beta'}"'] \\
\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "[T]_{\alpha}^{\beta}"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times 1) \arrow[r, "[I]_{\beta}^{\beta'}"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times 1)
\end{tikzcd}
$$

Figura 5: $[T]_{\alpha}^{\beta'} = [I]_{\beta}^{\beta'}\cdot [T]_{\alpha}^{\beta}$

En este caso; como lo muestra el cuadro encima:

$$T = 1_{\mathbb{W}}\circ T \Longrightarrow [T]_{\alpha}^{\beta'} \;=\; [I]_{\beta}^{\beta'}\cdot [T]_{\alpha}^{\beta}$$

♦ *Relación entre $[T]_{\alpha'}^{\beta'}$ y $[T]_{\alpha}^{\beta}$*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{V},\alpha') \arrow[r, "1_{\mathbb{V}}"] \arrow[d, "[\,]_{\alpha'}"'] \arrow[dr, phantom, "\textit{Gestión interna}"] & (\mathbb{V},\alpha) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "[\,]_{\alpha}"'] \arrow[dr, phantom, "\textit{Gestión externa}"] & (\mathbb{W},\beta) \arrow[r, "1_{\mathbb{W}}"] \arrow[d, "[\,]_{\beta}"'] \arrow[dr, phantom, "\textit{Gestión interna}"] & (\mathbb{W},\beta') \arrow[d, "[\,]_{\beta'}"'] \\
\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "{[I]_{\alpha'}^{\alpha}}"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "{[T]_{\alpha}^{\beta}}"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times 1) \arrow[r, "{[I]_{\beta}^{\beta'}}"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times 1)
\end{tikzcd}$$

Figura 6: $[T]_{\alpha'}^{\beta'} = [I]_{\beta}^{\beta'} \cdot [T]_{\alpha}^{\beta} \cdot [I]_{\alpha'}^{\alpha}$

En este caso; como lo muestra el cuadro encima:

$$T = 1_{\mathbb{W}} \circ T \circ 1_{\mathbb{V}} \Longrightarrow [T]_{\alpha'}^{\beta'} = [I]_{\beta}^{\beta'} \cdot [T]_{\alpha}^{\beta} \cdot [I]_{\alpha'}^{\alpha}$$

♦ *En particular si* $\mathbb{V} = \mathbb{W}$ *entonces* $[T]_{\alpha}^{\alpha} = [I]_{\beta}^{\alpha}[T]_{\beta}^{\beta}[T]_{\alpha}^{\beta}$

Teorema 5.3. (**Segundo criterio de clasificación**) *Si* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$ *son dos* $\mathbb{K}$ *espacios vectoriales tal que* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ *y* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) = n$, *y* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ *entonces*

$$T \text{ Isomorfismos} \iff [T]_{\alpha}^{\beta} \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n))$$

Podemos "dibujar una demostración usando diagramas" como sigue:
(a) *Para la relación* $T^{-1} \circ T$ *tenemos*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{V},\alpha) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "[\,]_{\alpha}"'] & (\mathbb{W},\beta) \arrow[r, "T^{-1}"] \arrow[d, "[\,]_{\beta}"'] & (\mathbb{V},\alpha) \arrow[d, "[\,]_{\alpha}"'] \\
\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "{[T]_{\alpha}^{\beta}}"] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "{[T^{-1}]_{\beta}^{\alpha}}"] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1)
\end{tikzcd}$$

Figura 7: $[T^{-1} \circ T]_{\alpha}^{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\alpha} = I_n = [T^{-1}]_{\beta}^{\alpha} \cdot [T]_{\alpha}^{\beta}$

(b) *Y para la relación* $T \circ T^{-1}$ *tenemos:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{W},\beta) \arrow[r, "T^{-1}"] \arrow[d, "[\,]_\beta"'] & (\mathbb{V},\alpha) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "[\,]_\alpha"'] & (\mathbb{W},\beta) \arrow[d, "[\,]_\beta"'] \\
\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "[T^{-1}]_\beta^\alpha"] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "[T]_\alpha^\beta"] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1)
\end{tikzcd}$$

Figura 8: $[T\circ T^{-1}]_\beta^\beta = [I]_\beta^\beta = I_n = [T]_\alpha^\beta \cdot [T^{-1}]_\beta^\alpha$

Ahora, la justificación es la siguiente:

$$\begin{aligned}
T \text{ Isomorfismos } &\iff (\exists T^{-1}; T^{-1}\in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{W},\mathbb{V})) : [T\circ T^{-1} = 1_{\mathbb{W}} \wedge T^{-1}\circ T = 1_{\mathbb{V}}] \\
&\iff [T\circ T^{-1}]_\beta^\beta = [1_{\mathbb{W}}]_\beta^\beta \;\wedge\; [T^{-1}\circ T]_\alpha^\alpha = [1_{\mathbb{V}}]_\alpha^\alpha \\
&\iff [T]_\alpha^\beta [T^{-1}]_\beta^\alpha = I_n \;\wedge\; [T^{-1}]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\beta = I_n \\
&\iff [T^{-1}]_\beta^\alpha = ([T]_\alpha^\beta)^{-1} \\
&\iff [T]_\alpha^\beta \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n))
\end{aligned}$$

Corolario 5.3.1. *Si* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$ *son dos* $\mathbb{K}$ *espacios vectoriales tal que* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ *y* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) = n$, *y* $T\in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ *entonces*

$$T \text{ Isomorfismos } \iff \det[T]_\alpha^\beta \neq 0$$

En efecto

$$T \text{ Isomorfismos } \iff [T]_\alpha^\beta \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)) \iff \det[T]_\alpha^\beta \neq 0$$

6. Proyectos y Construcción de Transformaciones Lineales

6.1. Proyecto 1. Restricciones en el usuario final ósea en el espacio de llegada. Construya $T\in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ tal que $Img(T) = \langle\{(1,0,0),(1,1,1)\}\rangle$

Solución

Podemos usar cualquier base (condiciones óptimas en el país de origen) de $\mathbb{R}^2$, usemos por eficiencia la base canónica:

Definamos:

$$\begin{aligned}
T(1,0) &= (1,0,0) \\
T(0,1) &= (1,1,1)
\end{aligned}$$

Luego, $T(x,y) = T(x(1,0)+y(0,1)) = xT(1,0)+yT(0,1) = x(1,0,0)+y(1,1,1)$

Así que una alternativa de definición es $T(x,y) = (x+y,y,y)$.

Análisis del Proyecto 1. Restricciones en el usuario final ósea en el espacio de llegada

- El estudiante debe observar que en este proyecto, la libertad de la construcción está en que puede escoger cualquier base para definir la transformación lineal, y así obtener una obra que cumpla con las características pedidas.

- Además debe observar que la respuesta es única (salvo múltiplos), aunque puede elegir cualquiera de las infinitas bases del espacio.

- La palabra eficiencia significa exactamente lo siguiente. Si usa otra conjunto, digamos α, para definir la transformación debe realizar las siguiente tarea obligada:

    - Debe mostrar que α es una base del espacio, con el consiguiente gasto de tiempo y energía.

6.2. Proyecto 2. Restricciones en el usuario inicial ósea en el espacio de salida. Construya $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tal que $\ker(T) = \langle\{(1,1)\}\rangle$

Solución

Aquí no podemos usar cualquier base de $\mathbb{R}^2$, pues tenemos una restricción de "presupuesto", porque la condición expuesta esta en el dominio de la función y por tanto no es un resultado.

De acuerdo a la técnica ahora debemos construir una base que contemple la restricción

Si $\alpha = \{(1,1), 1, 0\}$, por ejemplo entonces debemos verificar que α es una base.

- Por demostrar que α es Linealmente independiente

$$\begin{aligned} a_1(1,1) + a_2(1,0) = (0,0) &\implies (a_1 + a_2, a_1) = (0,0) \\ &\implies a_1 + a_2 = 0 \wedge a_1 = 0 \\ &\implies a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \end{aligned}$$

  Luego, α es linealmente independiente

- Por demostrar que α es un sistema de generadores para $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} a_1(1,1) + a_2(1,0) = (x,y) &\implies (a_1 + a_2, a_1) = (x,y) \\ &\implies a_1 + a_2 = x \wedge a_1 = y \\ &\implies a_1 = y \wedge a_2 = x - y \end{aligned}$$

  Por tanto

$$(x,y) = y(1,1) + (x-y)(1,0)$$

- Ahora definamos, por ejemplo

$$\begin{aligned} T(1,1) &= (0,0,0) \quad (\text{ Esto es obligación}) \\ T(1,0) &= (1,0,0) \quad (\text{ Esto es libre}) \end{aligned}$$

- Finalmente

$$\begin{aligned} T(x,y) &= yT(1,1) + (x-y)T(1,0) \\ &= y(0,0,0) + (x-y)(1,0,0) \\ &= (x-y,0,0) \end{aligned}$$

Así que una alternativa de definición es $T(x, y) = (x + y, y, y)$.

Análisis del Proyecto 2: Restricciones en el usuario inicial ósea en el espacio de salida

- El estudiante debe observar que en este proyecto, la libertad de la construcción no es completa, ya que cualquier base debe considerar el par $(1, 1)$, para definir la transformación lineal, y así obtener una obra que cumpla con las características pedidas.

- Además debe observar que la respuesta no es única, porque tiene la libertad de asignar cualquier trio en $\mathbb{R}^3$, salvo el origen $(0, 0, 0)$, caso contrario la dimensión del núcleo sería 2 y no 1.

- La palabra eficiencia significa exactamente aquí lo siguiente. Es preciso verificar cada uno de los pasos del algoritmo empleado en la construcción.

6.3. Proyecto 3. Restricciones combinadas, en el usuario inicial y en el usuario final. Construya $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tal que verifique simultáneamente las condiciones

(a) $\ker(T) = \langle\{(1, 1)\}\rangle$
(b) $Img(T) = \langle\{(1, 0, 0)\}\rangle$
Solución

Aprovecharemos la información acumulada hasta ahora

De acuerdo a la técnica que hemos implementado, ya sabemos que debemos construir una base que contemple la restricción

En esta dirección sabemos que $\alpha = \{(1, 1), 1, 0\}$, es una base por el resultado obtenido en el ejemplo 2. y que

$$(x, y) \quad = \quad y(1, 1) + (x - y)(1, 0)$$

Ahora siguiendo con el proceso definamos

$$\begin{array}{lcll} T(1,1) & = & (0,0,0) & \text{(Esto es obligación)} \\ T(1,0) & = & (1,0,0) & \text{(Esto es obligación o alguno de sus múltiplos)} \end{array}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= yT(1, 1) + (x - y)T(1, 0) \\ &= y(0, 0, 0) + (x - y)(1, 0, 0) \\ &= (x - y, 0, 0) \end{aligned}$$

Análisis del Proyecto 3

- El estudiante debe observar que en este proyecto, la libertad de la construcción es menor, ya que aunque escoge cualquier base, esta debe considerar el par $(1, 1)$, y el otro par, debe ser definido en la imagen prefijada.

- Este ejercicio o la gama de ejercicios de esta naturaleza, permite no sólo practicar construcciones sino que además obliga a revisar conceptos anteriores.

6.4. Ejercicios Propuestos de Transformaciones Lineales.

(1) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que núcleo$(T) = \langle\{(1,1,1)\}\rangle$

(2) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que Img$(T) = \langle\{(2,-3,1)\}\rangle$

(3) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que

(a) núcleo$(T) = \langle\{(1,-2,0),(0,0,1)\}\rangle$, y

(b) Img$(T) = \langle\{(1,0,0)\}\rangle$

(4) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que

(a) $\ker(T) = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\}$, e

(b) $Img(T) = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = -A^t\}$

(5) Si $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$; tal que $T(x,y,z) = (x+y-z, x-y-z)$; determine $[T]_{c(3)}^{c(2)}$

(6) Si $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$; tal que $T(x,y) = (x+y, x-y, x-3y)$; determine $[T]_{c(2)}^{c(3)}$

(7) Si $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$; tal que $T(u) = 2u$; determine $[T]_{c(n)}^{c(n)}$

(8) Si $T : \mathbb{R}_3[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$; tal que $T\left(\sum\limits_{i=0}^{3} a_i x^i\right) = a_2 + a_0 x - a_1 x^2$; determine $[T]_{p(3)}^{p(2)}$

(9) $T : \mathbb{R}_{n+1}[x] \longmapsto \mathbb{R}_n[x]$; tal que $T\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} j a_j x^{j-1}$; determine $[T]_{p(n+1)}^{p(n)}$

(10) $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$; tal que $T(a_{ij}) = (a_{ji})$; determine$[T]_{m(3)}^{m(3)}$

(11) Sean $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tal que $T(x,y) = (x+2y, x-y)$ y $\alpha = \{(1,-2),(3,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$

- Determine $[T]_{\alpha}^{\alpha}$
- Determine $[T]_{\alpha}^{c(2)}$
- Determine $[T]_{c(2)}^{\alpha}$
- Calcule $[T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{\alpha}^{c(2)}$
- Calcule $[I]_{c(2)}^{\alpha} \cdot [T]_{c(2)}^{c(2)} \cdot [I]_{\alpha}^{c(2)}$
- Calcule $[I]_{\alpha}^{c(2)} \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{c(2)}^{\alpha}$

(12) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que, $T(x,y,z) = (x+2y+2z, x+y, 2y-z)$ y $\alpha = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$, una base de $\mathbb{R}^3$

- Determine $[T]_{\alpha}^{\alpha}$
- Determine $[T]_{\alpha}^{c(3)}$

- Determine $[T]_{c(3)}^{\alpha}$
- Calcule $[T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{\alpha}^{c(3)}$
- Calcule $[I]_{c(3)}^{\alpha} \cdot [T]_{c(3)}^{c(3)} \cdot [I]_{\alpha}^{c(3)}$
- Calcule $[I]_{\alpha}^{c(3)} \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{c(3)}^{\alpha)}$

(13) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_1[x], \mathbb{R}_3[x])$ definida por $T(p(x)) = x^2 p(x)$ y considera las bases $\alpha = \{1, x\}$, y $\alpha' = \{x, x+1\}$ de $\mathbb{R}_1[x]$ y la base $\beta = \{x, x+1, x^2+1, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$

- Determine $[T]_{\alpha}^{p(3)}$
- Determine $[T]_{\alpha'}^{p(3)}$
- Determine $[T]_{\alpha}^{\beta}$

(14) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V. Demuestre que

$$T(\alpha) := \{T(v_1), T(v_2); \dots, T(v_n)\} \text{ base de } V \Longrightarrow T \text{ inyectiva}$$

(15) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V. Demuestre que

$$T(\alpha) := \{T(v_1), T(v_2); \dots, T(v_n)\} \text{ base de } V \Longrightarrow T \text{ sobreyectiva}$$

(16) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base del $\mathbb{K}$ espacio vectorial V. Sea

$$V^* = \{T : V \longmapsto \mathbb{K} \mid T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})\}$$

(i) Demuestre que V^* es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial

(ii) Sea $\alpha^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$ tal que $v_j^*(v_i) = \begin{cases} 1 : & i = j \\ 0 : & i \neq j \end{cases}$. Demuestre que

- $v_i^* \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$; para $i = 1, 2, \dots, n$
- α^* es una base de V^*

Bibliografía

[1] Bello, I. "Álgebra Elemental ", Brooks/Cole Publishing Company 1999.

[2] Bobadilla, G. Labarca R. "Cálculo 1 ", Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago 2007.

[3] Boldrini, J. Rodriguez, S. Figueiredo, V. Wetzler, H. "Álgebra Linear", Editora Harper & Row do Brasisl Ltda, 1984.

[4] Fraleigh J. "Álgebra Abstracta "Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

[5] Grimaldi, R. "Matemáticas Discretas y Combinatorias ", Addison Wesley 1997.

[6] Gustafson, R. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[7] Kaufmann, J. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 2000

[8] Santander, R. "Álgebra Elemental y superior", Universidad de Santiago 2004

[9] Santander, R. "Álgebra Lineal", Universidad de Santiago 2004

[10] Santander, R. "Un Segundo curso de Algebra Lineal"

[11] Swokowski, E. "Álgebra y trigonometría ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[12] Zill, D. " Álgebra y trigonometría ", Mc Graw Hill 1999

Indice Alfabético