Contenidos

CAPITULO 3

Producto Interno

El trabajo solidario es lo único que hace humano al ser humano

1. Preliminares

Consideremos un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n y $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V entonces automáticamente pensamos en el meollo del Algebra Lineal, es decir que, para cada $v \in V$ existen únicos escalares que representan al vector v, en forma teórica o práctica respecto de esa base. En símbolos

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \Longleftrightarrow [v]_\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Más aún,

$$\begin{array}{ccccc} [\ ]_\alpha & : & V & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \\ & & v & \longmapsto & [v]_\alpha \end{array}$$

Es una biyección de espacios vectoriales, y además podemos observar los siguientes puntos centrales:

(1) Dada la base y el vector v, la determinación de los escalares a_i, para $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se realiza a través de un sistema de ecuaciones.

(2) Lamentablemente la resolución del sistema de ecuaciones implica que la búsqueda es secuencial, esto es, para conocer a_i, por ejemplo debo conocer a_{i-1}. ¿Y qué tiene de malo una búsqueda secuencial?. Una respuesta es depende de ¿quién? y ¿qué se ejecuta?.

Por ejemplo

(i) De grano en grano un zorzal se comió una viña, en este caso para el zorzal no hay problema, probablemente se encuentre " feliz ".

(ii) Suponga que desea pedir un préstamo en el Banco U, en esta empresa usted es lo siguiente para su Ejecutivo de Cuentas:

$$Usted = \begin{bmatrix} \text{fulano de tal} \\ \text{5204401-4} \\ \text{casado} \\ \text{empleado} \\ \vdots \\ \text{pocos miles} \\ \text{morro 2} \\ \text{latino} \end{bmatrix}$$

¿Cuál cree Ud. qué es la casilla favorita del ejecutivo?.

Acertó en pleno, imagina que el tuviese que leer todas las casillas (posiciones) anteriores a los pocos miles para pensar en su préstamo, si así fuese, lo más probable es que se quedará sin comprar su netbook favorito.

(iii) ¿Cómo cree que el ejecutivo accedió a la casilla correcta.?

Probablemente el procedió de la siguiente forma:

- Generó una matriz adecuada, con ceros en la posición que no le interesa, es decir construyó

$$Ejecutivo = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Procedió a multiplicar por cero, como antaño, para eliminar lo indeseable, es decir

$$\begin{aligned}
\langle Ejecutivo, Usted\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \text{fulano de tal} \\ \text{5204401-4} \\ \text{casado} \\ \text{empleado} \\ \vdots \\ \text{pocos miles} \\ \text{morro 2} \\ \text{latino} \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \text{fulano de tal} \\ \text{5204401-4} \\ \text{casado} \\ \text{empleado} \\ \vdots \\ \text{pocos miles} \\ \text{morro 2} \\ \text{latino} \end{bmatrix} \\
&= \text{pocos miles}
\end{aligned}$$

- Conclusión: No califica

(3) No obstante el resultado de la gestión, hemos obtenido la siguiente moraleja o enseñanza, la cual modelaremos técnicamente como sigue.

Como $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V entonces dados los vectores u y v de V existen únicos escalares tales que:

$$v=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i \quad\Longleftrightarrow\quad [v]_\alpha=\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$$

y

$$u=\sum_{i=1}^{n}b_iv_i \quad\Longleftrightarrow\quad [u]_\alpha=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

entonces definimos, siguiendo al ejecutivo

$$\langle u,v\rangle_\alpha = \left\langle \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\right\rangle = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}^t \overline{\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \bar{a}_1\\ \bar{a}_2\\ \vdots\\ \bar{a}_n\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} b_i\bar{a}_i$$

(4) Tenemos por ejemplo:

(a) Si $V=\mathbb{R}^2$ y $\alpha=c(2)=\{(1,0),(0,1)\}$ entonces $[(x,y]_{c(2)}=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$. Luego,

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = (x_1 \quad y_1)\begin{pmatrix} x_2\\ y_2\end{pmatrix} = x_1x_2+y_1y_2$$

(b) Si $V=\mathbb{R}^2$ y $\alpha=\{(1,1),(1,-1)\}$ entonces $[(x,y)]_\alpha=\begin{pmatrix} \dfrac{x+y}{2}\\ \dfrac{x-y}{2}\end{pmatrix}$, Pues;

$$(x,y)=a_1(1,1)+a_2(1,-1)\Longleftrightarrow a_1=\frac{x+y}{2}\wedge a_2=\frac{x-y}{2}$$

Así que,

$$\begin{aligned}\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle &= \begin{pmatrix} \dfrac{x_1+y_1}{2}\\ \dfrac{x_1-y_1}{2}\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \dfrac{x_2+y_2}{2}\\ \dfrac{x_2-y_2}{2}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}(x_1x_2+y_1y_2)\end{aligned}$$

(5) Antes de concluir esta motivación, observamos que a causa de las propiedades del producto de matrices, el producto debe tener las siguientes propiedades:

(a) $\langle u,u\rangle\geq 0$

En efecto

$$\langle u,u\rangle = \langle [u]_\alpha,[u]_\alpha\rangle = [u]_\alpha^t\cdot \overline{[u]}_\alpha = \sum_{i=1}^{n}u_i\bar{u}_i=\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2\geq 0$$

(b) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

En efecto

$$\begin{aligned}
\langle u+v, w\rangle &= \langle [u+v]_\alpha, [w]_\alpha\rangle = [u+v]^t_\alpha \cdot [\bar{w}]_\alpha = \sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)\bar{w}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}(u_i\bar{w}_i + v_i\bar{w}_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i\bar{w}_i + \sum_{i=1}^{n} v_i\bar{w}_i = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle
\end{aligned}$$

(c) De la misma forma que encima verificamos que $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

(d) $\langle \lambda\cdot u, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle$

En efecto

$$\langle \lambda\cdot u, w\rangle = [\lambda\cdot u]^t_\alpha[\bar{w}]_\alpha = \lambda[u]^t_\alpha\cdot[\bar{w}]_\alpha = \sum_{i=1}^{n}\lambda\cdot u_i\bar{w}_i = \lambda\sum_{i=1}^{n}u_i\bar{w}_i = \lambda\langle u, w\rangle$$

(e) Análogamente verificamos que $\langle u, \lambda w\rangle = \bar{\lambda}\langle u, w\rangle$

(f) $\langle u, w\rangle = \overline{\langle w, u\rangle}$

En efecto

$$\langle u, w\rangle = [u]^t_\alpha, [\bar{w}]_\alpha = [u]^t_\alpha\cdot[\bar{w}]_\alpha = \sum_{i=1}^{n}u_i\bar{w}_i = \overline{\sum_{i=1}^{n}w_i\bar{u}_i} = \overline{\langle w, u\rangle}$$

Todo lo anterior nos motiva a hacer la siguiente definición.

Definición 1.1. *Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial. V se dice un espacio con "Producto Interno" ó un espacio "Prehilbertiano" si y sólo si existe una función.*

$$\begin{aligned}
\langle,\rangle \quad : \quad & V\times V \longmapsto \mathbb{K} \\
& (u,v) \longmapsto \langle u, v\rangle
\end{aligned}$$

tal que satisface las condiciones:

(1) $\langle v, v\rangle \geq 0 \quad (\forall v, v\in V)\wedge\langle v, v\rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

(2) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

(3) $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

(4) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$

(5) $\langle u, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle u, v\rangle$

(6) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

Ejemplo 1.1.1. *En $\mathbb{K}^n$ definimos:*

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j \tag{1}$$

El producto definido en (1) se llama producto interno canónico de $\mathbb{K}^n$, debe observarse que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces (1) se transforma en:

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \tag{2}$$

Ejemplo 1.1.2. *En $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ define*

$$\langle A, B \rangle = tr(B^t \cdot A) \tag{3}$$

El producto definido en (3) se llama producto interno canónico de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$

Ejemplo 1.1.3. *En $C([a,b]) = \{f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$ define*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\, dt \tag{4}$$

El producto definido en (4) se llama producto interno canónico de $C([a,b])$

Ejemplo 1.1.4. *En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ define para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ el producto*

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2) \tag{5}$$

entonces el producto definido en (26) *es un producto interno*

2. Bases Ortogonales y Ortonormales

Aunque nuestro astuto ejecutivo, encontró la forma de determinar la coordenada que a él le interesaba, no obstante hay todavía un pequeño problema.

Para determinar una coordenada hay que ser capaz de tener las coordenadas del vector, es decir primero debe tener un cliente, y más aún debe conocerlo perfectamente !!!

Esto quiere decir que el concepto de base sigue siendo imprescindible, y lo que pretendemos ahora es sólo perfeccionarlo.

Si V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, una $\mathbb{K}$ - base de V entonces para cada $v \in V$ existen únicos escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ en $\mathbb{K}$ tales que

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \tag{6}$$

Equivalentemente

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \tag{7}$$

Así, lo expresado en (6) ó (7) es simplemente el " Objetivo fundamental " del algebra Lineal, es decir "Para conocer completamente un vector de V basta conocer sus " Coordenadas respecto del Sistema de Información α."

Entonces parece natural que debamos analizar el efecto del producto interno (si es que lo hay) en el proceso de búsqueda de coordenadas. Es inmediato de observar que la ventaja del producto es que, permite implementar la preconcebida máxima " multiplicate por cero " la cual sin duda para bien ó para mal reduce en cualquier caso el problema.

Análisis 2.1. *Sea $\alpha = \{v_1, v_2\}$ una $\mathbb{R}$ - base de $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ entonces como α es base, para $v \in \mathbb{R}^2$ existen únicos a_1, a_2 en $\mathbb{K}$ tales que*

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 \tag{8}$$

Como $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ entonces podemos multiplicar (8) por v_1 para obtener;

$$\langle v, v_1\rangle \;=\; \langle a_1 v_1 + a_2 v_2, v_1\rangle = a_1\langle v_1, v_1\rangle + a_2\langle v_2, v_1\rangle = a_1\langle v_1, v_1\rangle$$

De donde sigue que, $a_1 = \dfrac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}$, observe que $\langle v_1, v_1\rangle > 0$, pues es un vector no nulo.

De una forma absolutamente análoga a la anterior obtenemos que $a_2 = \dfrac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}$

Así que, si $\alpha = \{v_1, v_2\}$ una $\mathbb{K}$ - base de $\mathbb{R}^2$ tal que$\langle v_1, v_2\rangle = 0$ entonces

$$\boxed{v \;=\; \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}v_2}$$

Análisis 2.1.1. *Intentamos generalizar el análisis anterior. Supongamos que en un $\mathbb{V}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ existe una base $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tal que $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$ entonces como consecuencia del hecho que α es base sigue que,*

$$u \in \mathbb{V} \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

Ahora, como consecuencia de que $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$ sigue que

$$\begin{aligned} u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad &\Longrightarrow \quad \langle u, v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i\langle v_i, v_j\rangle \\ &\Longrightarrow \quad \langle u, v_j\rangle = a_j\langle v_j, v_j\rangle \\ &\Longrightarrow \quad a_j = \frac{\langle u, v_j\rangle}{\langle v_j, v_j\rangle} \quad (j = 1, 2, \dots n) \end{aligned}$$

Esto es extraordinario, pues en esta condiciones tenemos "casi el máximo de eficiencia," ya que,

$$u=\sum_{i=1}^n\frac{\langle u,v_i\rangle}{\langle v_i,v_i\rangle}v_i \iff [u]_\alpha=\begin{pmatrix}\frac{\langle u,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}\\ \frac{\langle u,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle}\\ \vdots\\ \frac{\langle u,v_n\rangle}{\langle v_n,v_n\rangle}\end{pmatrix}$$

Motivados por lo anterior, hacemos la definición formal de este objeto.

Definición 2.2. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno $\langle,\rangle$ y considera $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subset V$ entonces α será llamada una "Base Ortogonal" si*

(1) *α es una base de V*

(2) *Si $j\neq k$ entonces $\langle v_j,v_k\rangle=0$*

(3) *La coordenada respecto de la base ortogonal α $a_i=\dfrac{\langle u,v_i\rangle}{\langle v_i,v_i\rangle}$ se llamará el "$i-$ésimo coeficiente de Fourier del vector u."*

Ejemplo 2.2.1. *$c(n)$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$ con el producto interno canónico $\langle,\rangle$ es una base ortogonal, pues*

$$\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}1: & i=j\\ 0: & i\neq j\end{cases}$$

Ejemplo 2.2.2. *Sea $V=\langle\{1,\operatorname{sen}x,\cos x,\operatorname{sen}2x,\cos 2x,\dots,\operatorname{sen}nx,\cos nx\}\rangle$ y define en V el producto interno:*

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)\,dt \tag{9}$$

entonces $\alpha=\{1,\operatorname{sen}x,\cos x,\operatorname{sen}2x,\cos 2x,\dots,\operatorname{sen}nx,\cos nx\}$ es una base ortogonal de V, respecto de (9) En efecto

$$\begin{aligned}\langle\operatorname{sen}kt,\cos st\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}kt\cos st\,dt \quad k\neq s\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\operatorname{sen}(k+s)t+\operatorname{sen}(k-s)t]\,dt\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+s}\cos(k+s)t\,|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k-s}\cos(k-s)t\,|_{-\pi}^{\pi}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Usando técnicas de transformación de ángulos análoga a la desarrollada encima obtenemos.

$$\langle\operatorname{sen}kt,\operatorname{sen}st\rangle=0 \quad\wedge\quad \langle\cos kt,\cos st\rangle=0 \quad (\textit{para } k\neq s)$$

Observación 2.2.3. *Observamos que la fortaleza de las bases ortogonales, a la hora de determinar las coordenadas de un vector, radica en el hecho que los productos entre elementos distintos es cero entonces cobra relevancia preguntar.*

(1) *¿Qué significa geométricamente el hecho* $\langle v_i, v_k\rangle = 0$*?, para* $i \neq k$*. Para responder a esto, consideremos la figura 1, y a partir de ese modelo, usemos el producto interno usual en* $\mathbb{R}^2$*,*

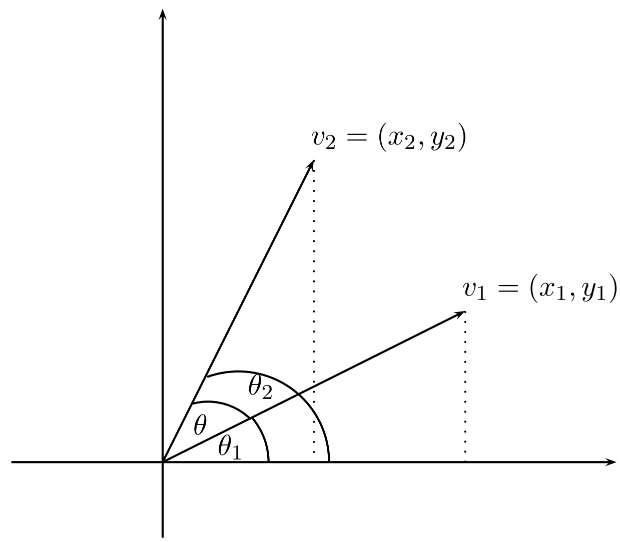


Figura 1

Entonces sucede que

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_2\rangle = 0 &\iff x_1x_2 + y_1y_2 = 0\\
&\iff l(v_1)\cos\theta_1 l(v_2)\cos\theta_2 + l(v_1)\operatorname{sen}\theta_1 l(v_2)\operatorname{sen}\theta_2 = 0\\
&\iff l(v_1)l(v_2)\cos(\theta_2 - \theta_1) = 0\\
&\iff l(v_1)l(v_2)\cos\theta = 0\\
&\iff \theta = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Así que la conclusión es que en el plano $\mathbb{R}^2$ *la condición* $\langle v_1, v_2\rangle = 0$*, significa que las rectas generadas por los vectores* v_1 *y* v_2 *son perpendiculares.*

(2) *Las bases ortonormales (ortogonales), se muestran como insuperables en su trabajo, es decir en la misión de determinar las coordenadas (coeficientes de Fourier) de los elementos del espacio vectorial, salvo por un detalle, ¿existen en abundancia?, y si lo son ¿son fáciles de ubicar?.*

Para responder las preguntas planteadas encima, el análisis anterior nos permite imaginar un modelo genérico para el caso en que una base de $\mathbb{V}$ *no cumpla esta propiedad. Es decir si* $\alpha = \{v_1, v_2\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^2$ *y* $\langle v_1, v_2\rangle \neq 0$.

O sea que podemos considerar la siguiente situación geométrica.

Si $\langle v_1, v_2\rangle \neq 0$ *entonces de acuerdo a la figura 1, sabemos que* v_1 *no es perpendicular a* v_2*, así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que los vectores son como en las Figuras de* (10).

Etapa 1. Modelo en bruto

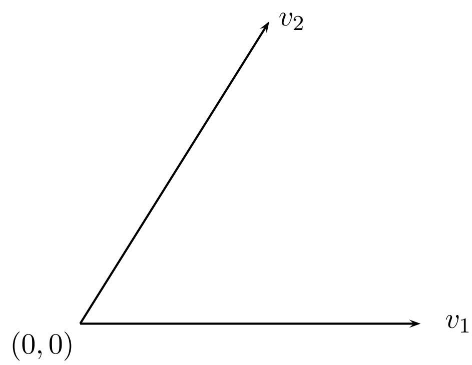


Figura 2

Etapa 2. Modelo en contexto

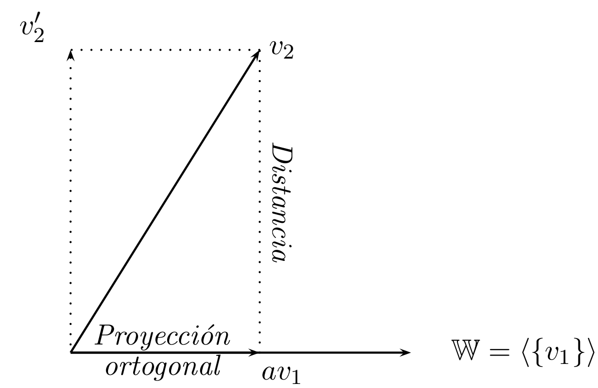


Figura 3

(10)

Entonces,

$$v_2 = v_2' + av_1 \tag{11}$$

Lamentablemente, (11) es una ecuación que liga tres datos y sólo conocemos uno !!!, pero, no todo está perdido, pues, observen que en virtud de las propiedades del producto interno tenemos.

$$\begin{aligned} v_2 = v_2' + av_1 \quad &\Longrightarrow \quad \langle v_2, v_1\rangle = \langle v_2', v_1\rangle + \langle av_1, v_1\rangle \\ &\Longrightarrow \quad \langle v_2, v_1\rangle = a\langle v_1, v_1\rangle \\ &\Longrightarrow \quad a = \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \end{aligned}$$

Y sustituyendo en la ecuación (11) obtenemos

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 \tag{12}$$

Luego, tenemos lo siguiente:

$$\alpha = \{v_1, v_2\} \text{ base de V } \Longrightarrow \alpha' = \{v_1, v_2'\} \text{ es una base ortogonal de V}$$

Lo puede ser generalizada en el siguiente.

Teorema 2.3. *(Ortogonalización de Gram-Schmidt) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno $\langle,\rangle$ y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base V entonces $\alpha' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ es una base ortogonal, donde los v_i' satisfacen la siguiente ecuación vectorial.*

$$\begin{cases} v_j' = v_j - \dfrac{\langle v_j, v_{j-1}'\rangle}{\langle v_{j-1}', v_{j-1}'\rangle}v_{j-1}' - \cdots - \dfrac{\langle v_j, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle}v_1' : \quad (2 \leq j \leq n) \\ v_1' = v_1 \end{cases} \tag{13}$$

En efecto

De (12) sigue que el resultado vale para n=2

Supongamos que v'_j *es construido para* $(2 \leq j \leq n-1)$ *satisfaciendo (13).*

Es decir, $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_{n-1}\}$ *es un conjunto ortogonal.*

Sea $v'_n = v_n - \dfrac{\langle v_n, v'_{j-1}\rangle}{\langle v'_{j-1}, v'_{j-1}\rangle} v'_{j-1} - \cdots - \dfrac{\langle v_n, v'_1\rangle}{\langle v'_1, v'_1\rangle} v'_1$ *entonces*

$$\begin{aligned}
\langle v'_n, v'_j\rangle &= \left\langle v_n - \frac{\langle v_n, v'_{j-1}\rangle}{\langle v'_{j-1}, v'_{j-1}\rangle} v'_{j-1} - \cdots - \frac{\langle v_n, v'_1\rangle}{\langle v'_1, v'_1\rangle} v'_1, v'_j \right\rangle \\
&= \langle v_n, v'_j\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, v'_{n-i}\rangle}{\langle v'_{n-i}, v'_{n-i}\rangle} \langle v'_{n-i}, v'_j\rangle \\
&= \langle v_n, v'_j\rangle - \frac{\langle v_n, v'_j\rangle}{\langle v'_j, v'_j\rangle} \langle v'_j, v'_j\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Lo que demuestra el teorema.

Ejemplo 2.3.1. *Consideremos el subespacio* $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ *entonces usando el producto interno usual de* $\mathbb{R}^4$, *determinemos una base ortogonal para* $\mathbb{W}$.

Etapa 1. Determinamos una base de $\mathbb{W}$

$$\begin{aligned}
u \in \mathbb{W} &\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x + y + z + t = 0 \\
&\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge t = -x - y - z \\
&\iff u = (x, y, z, -x - y - z);\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\
&\iff u = x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, -1);\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \langle \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\} \rangle$$

Y, si notamos $\alpha = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$ *entonces* α *es una base de* $\mathbb{W}$, *pues son claramente linealmente independientes.*

Etapa 2. Ahora, ortogonalizamos, usando el proceso de G. Schmidt descrito en el teorema (2.3).

$$
\begin{aligned}
v_1' &= (1,0,0,-1)\\
v_2' &= (0,1,0,-1) - \frac{\langle (0,1,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}{\langle (1,0,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}(1,0,0,-1)\\
&= (0,1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,0,0,-1)\\
&= \left(-\frac{1}{2},1,0,-\frac{1}{2}\right) \quad \textit{tomaremos } v_2' = (-1,2,0,-1)\\
v_3' &= (0,0,1,-1) - \frac{\langle (0,0,1,-1),(-1,2,0,-1)\rangle}{\langle (-1,2,0,-1),(-1,2,0,-1)\rangle}(-1,2,0,-1) -\\
& \frac{\langle (0,0,1,-1),(1,0,0,-1)\rangle}{\langle (1,0,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}(1,0,0,-1)\\
&= (0,0,1,-1) - \frac{1}{6}(-1,2,0,-1) - \frac{1}{2}(1,0,0,-1)\\
&= \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1,-\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\alpha' = \{(1,0,0,-1),(-1,2,0,-1),(-1,-1,3,-1)\} \quad \textit{es una base ortogonal de } \mathbb{W}$$

Observación 2.4. *Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortogonal entonces*

(1) *Para cada $u \in \mathbb{V}$, la representación única en términos de la base α.*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i$$

Pero, dando una nueva mirada, (interesante preguntarse ¿por qué no lo hicimos antes?), podemos observar en primer lugar el siguiente fenómeno.

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} \cdot v_i\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\langle v_i, v_i\rangle} \cdot \langle u, v_i\rangle \cdot v_i\\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i\rangle \cdot \frac{v_i}{\langle v_i, v_i\rangle}
\end{aligned}
$$

Si llamamos $\beta = \{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$, donde $v_i' = \dfrac{v_i}{\langle v_i, v_i\rangle}$ entonces tenemos el siguiente "mejoramiento técnico en la representación de los vectores."

Teorema 2.5. *Si llamamos $\beta = \{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$, donde $v_i' = \dfrac{v_i}{\langle v_i, v_i\rangle}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ entonces*

(a) $\langle v_i', v_j'\rangle = 0$ *si* $i \neq j$

(b) $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i\rangle \cdot v_i'$

En efecto

Para dilucidar el primer punto, hacemos lo siguiente.

$$
\begin{aligned}
\langle v_i', v_j'\rangle &= \left\langle \frac{v_i}{\langle v_i, v_i\rangle}, \frac{v_j}{\langle v_j, v_j\rangle} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\langle v_i, v_i\rangle \cdot \overline{\langle v_i, v_j\rangle}} \langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad \textit{Si } i \neq j \textit{ pues } \alpha \textit{ es base ortogonal}
\end{aligned}
$$

Del punto anterior sigue que β es una base ortogonal y entonces cada $u \in \mathbb{V}$ se escribe de forma única como

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i\rangle \cdot v_i'$$

(2) *Nos queda pendiente dilucidar cuanto vale $\langle v_i', v_i'\rangle$. En esta dirección si calculamos obtenemos lo siguiente*

$$
\begin{aligned}
\langle v_i', v_i'\rangle &= \left\langle \frac{v_i}{\langle v_i, v_i\rangle}, \frac{v_i}{\langle v_i, v_i\rangle} \right\rangle = \frac{1}{\langle v_i, v_i\rangle \cdot \overline{\langle v_i, v_i\rangle}} \langle v_i, v_i\rangle \\
&= \frac{1}{\langle v_i, v_i\rangle^2} \langle v_i, v_i\rangle \quad (\textit{Pues } \langle v_i, v_i\rangle \in \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Motivados por lo anterior, y aprovechando las propiedades del producto interno hacemos la siguiente definición

Definición 2.6. *Llamaremos normativa o norma inducida por el producto interno imperante en el espacio vectorial $\mathbb{V}$ a la función*

$$\| \| : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad \textit{tal que } \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Ejemplo 2.6.1. *En $\mathbb{K}^n$ tenemos que $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$. En particular para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $n = 2$ la norma $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ corresponde al módulo del número complejo asociado, o la distancia desde el origen al punto (x_1, x_2).*

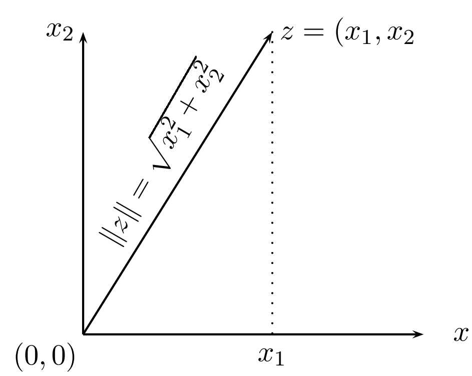


Figura 4

Lema 2.6.2. *Para cada $u \in \mathbb{V}$ y $v \in \mathbb{V}$ se satisface la relación (conocida como desigualdad de Cauchy-Schwarz)*

$$\langle u, v\rangle \leq \|u\| \cdot \|v\| \tag{14}$$

En efecto

En primer lugar escribiendo al complejo $\langle u, v\rangle$ *en su forma polar tenemos que,*

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= |\langle u, v\rangle|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = |\langle u, v\rangle|e^{i\alpha} &(15)\\ \langle v, u\rangle &= |\langle u, v\rangle|(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha) = |\langle u, v\rangle|e^{-i\alpha} &(16)\end{aligned}$$

A seguir, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\langle \lambda u + e^{i\alpha}v, \lambda u + e^{i\alpha}v\rangle \geq 0 &\Longrightarrow \langle \lambda u, \lambda u\rangle + \langle \lambda u, e^{i\alpha}v\rangle + \langle e^{i\alpha}v, \lambda u\rangle + \langle e^{i\alpha}v, e^{i\alpha}v\rangle \geq 0\\ &\Longrightarrow \lambda\overline{\lambda}\|u\|^2 + \lambda e^{-i\alpha}\langle u, v\rangle + e^{i\alpha}\overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \|v\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo lo obtenido en (15) *y* (16) *y considerando* $\lambda \in \mathbb{R}$ *en la desigualdad de encima obtenemos:*

$$\begin{aligned}\underbrace{\lambda^2\|u\|^2 + 2\lambda|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2}_{\text{ecuación cuadrática en }\lambda} \geq 0 &\Longleftrightarrow \underbrace{4|\langle u, v\rangle|^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2}_{\text{discriminante de la ecuación}} \leq 0\\ &\Longrightarrow \langle u, v\rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|\end{aligned}$$

Teorema 2.6.3. *Si* $\mathbb{V}$ *es un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial con producto interno* $\langle , \rangle$ *entonces la normativa definida en* **2.6** *satisface las siguientes propiedades*

(1) $\|u\| \geq 0 \quad (\forall u; u \in \mathbb{V})$ *y* $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$

(2) $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\| \quad (\forall u; u \in \mathbb{V})$ *y* $(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{K})$

(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

En efecto

(1) *Por definición* $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, *y* $\|u\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle u, u\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$

(2) $\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u\rangle} == \sqrt{|\lambda|^2\langle u, u\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle u, u\rangle} = |\lambda|\|u\|$

(3) $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + \langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} + \|v\|^2$. *Además*

$$\langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} = 2Re(\langle u, v\rangle) \leq 2\|u\|\|v\| \quad (\text{ Desigualdad de Cauchy Schwarz})$$

Así que

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

Definición 2.7. *Sea* V *un* $\mathbb{K}$*-espacio con producto interno* $\langle , \rangle$ *y considera* $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \subset V$ *entonces* β *será llamada una "Base Ortonormal" si*

(1) β *es una base ortogonal de* V

(2) $\|v_i\| = 1$, *es decir* $\langle v_i, v_i\rangle = 1$ *para* $i = 1, 2, \ldots n$

Equivalentemente

$$\beta \text{ es una base ortonormal} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 1 & : si\ i = j\\ 0 & : si\ i \neq j\end{cases}$$

Ejemplo 2.7.1. *$\beta = \{(1,1),(1,-1)\}$ es una base ortogonal respecto del producto interno usual de $\mathbb{R}^2$, pues $\langle (1,1),(1,-1)\rangle = 1-1=0$.*

Pero como,

$$\begin{aligned} \|(1,1\|) &= \langle (1,1),(1,1)\rangle = \sqrt{2} \\ \|(1,-1\|) &= \langle (1,-1),(1,-1)\rangle = \sqrt{2} \end{aligned}$$

entonces no es una base ortonormal.

Sin embargo, $\gamma = \left\{ \dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}}, \dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}} \right\}$ es una base ortonormal.

Unas consecuencias fabulosas de las bases ortonormales son las siguientes:

Teorema 2.8. *Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ y α y β son dos bases ortonormales entonces*

$$([I]_{\alpha}^{\beta})^{-1} \;=\; ([I]_{\alpha}^{\beta})^{t}$$

En efecto

Por una parte, si $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ son dos bases ortonormales entonces por definición tenemos que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} \;=\; ([v_1]_{\beta} \quad [v_2]_{\beta} \cdots [v_n]_{\beta}) = \begin{pmatrix} \langle v_1, w_1\rangle & \langle v_2, w_1\rangle & \cdots & \langle v_n, w_1\rangle \\ \langle v_1, w_2\rangle & \langle v_2, w_2\rangle & \cdots & \langle v_n, w_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle v_1, w_n\rangle & \langle v_2, w_n\rangle & \cdots & \langle v_n, w_n\rangle \end{pmatrix}$$

Por otra parte, y también por definición tenemos que

$$\begin{aligned} [I]_{\beta}^{\alpha} &= ([w_1]_{\alpha} \quad [w_2]_{\alpha} \cdots [w_n]_{\alpha}) \\ &= \begin{pmatrix} \langle w_1, v_1\rangle & \langle w_2, v_1\rangle & \cdots & \langle w_n, v_1\rangle \\ \langle w_1, v_2\rangle & \langle w_2, v_2\rangle & \cdots & \langle w_n, v_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle w_1, v_n\rangle & \langle w_2, v_n\rangle & \cdots & \langle w_n, v_n\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle v_1, w_1\rangle & \langle v_1, w_2\rangle & \cdots & \langle v_1, w_n\rangle \\ \langle v_2, w_1\rangle & \langle v_2, w_2\rangle & \cdots & \langle v_2, w_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle v_n, w_1\rangle & \langle v_n, w_2\rangle & \cdots & \langle v_n, w_n\rangle \end{pmatrix} \\ &= ([I]_{\alpha}^{\beta})^{t} \end{aligned}$$

Luego,

$$([I]_{\alpha}^{\beta})^{t} = [I]_{\beta}^{\alpha} = ([I]_{\alpha}^{\beta})^{-1}$$

Teorema 2.9. *Si $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de V entonces el producto interno se " canoniza ", en el siguiente sentido:*

$$\langle v, u\rangle \;=\; [v]_{\alpha}^{t} \cdot \overline{[u]}_{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle \overline{\langle u, v_j\rangle}$$

En efecto

Sean $v \in V$ y $u \in V$ entonces

$$
\begin{aligned}
\langle v, u\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n}\langle v, v_j\rangle v_j, \sum_{k=1}^{n}\langle u, v_k\rangle v_k \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle v, v_j\rangle \overline{\langle u, v_k\rangle}\langle v_j, v_k\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}\langle v, v_j\rangle \overline{\langle u, v_j\rangle}
\end{aligned}
$$

3. Proyección Ortogonal y Distancia a un Subespacio

Si remiramos el cuadro 10 entonces observamos que hemos resuelto uno de los tres problemas planteados en él, en efecto sólo construimos el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt, que esencialmente "consiste en controlar la sombra que un vector proyecta en un subespacio del espacio, es decir un vector anula a otro si su proyección en el es nula."

Etapa 2. Modelo en contexto de ortogonalización	Etapa 3. Modelo recontextualizado para proyección ortogonal

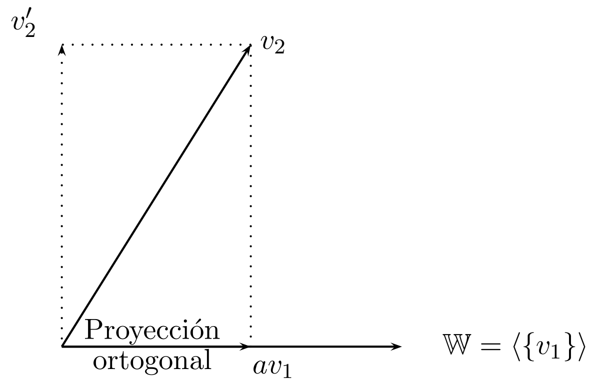
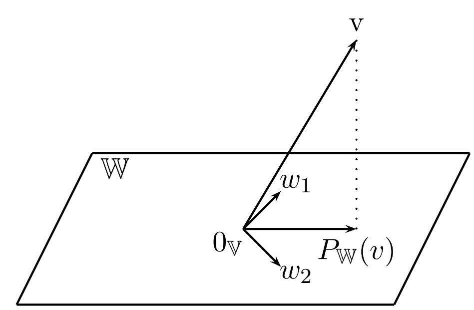

	

Figura 5	Figura6

(17)

Definición 3.1. *Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ y $\alpha = \{w_1, w_2, \dots, s_s\}$, una base ortogonal de $\mathbb{W}$ entonces llamaremos Proyección ortogonal a la función $P_{\mathbb{W}}$ definida como sigue:*

$$
P_{\mathbb{W}} : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{W} \quad \text{tal que } P_{\mathbb{W}}(v) = \sum_{i=1}^{S}\frac{\langle v, w_i\rangle}{\|w_i\|^2}\; w_i \tag{18}
$$

Ejemplo 3.1.1. *Si $\mathbb{W} = \{(x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 3z = 0\}$ entonces usando el producto interno usual determinemos $P_{\mathbb{W}}$*

(1) *En primer lugar, determinamos una base de* $\mathbb{W}$.

$$
\begin{aligned}
u \in \mathbb{W} &\iff u=(x,y,t,z)\in\mathbb{R}^4 \;\wedge\; x+y-3z=0\\
&\iff u=(x,y,t,z)\in\mathbb{R}^4 \;\wedge\; y=3z-x\\
&\iff u=(x,3z-x,t,z)\\
&\iff u=x(1,-1,0,0)+z(0,3,0,1)+t(0,0,1,0)
\end{aligned}
$$

Luego, $\mathbb{W}=\langle\{(1,-1,0,0),(0,3,0,1),(0,0,1,0)\}\rangle$. *Así que* $\dim_{\mathbb{R}}(W)\leq 3$, *por tanto debemos verificar que* $\alpha=\{(1,-1,0,0),(0,3,0,1),(0,0,1,0)\}$ *es una base de* W, *y para ello sólo falta ver que es linealmente independiente. Es decir, debemos mostrar que*

$a_1(1,-1,0,0)+a_2(0,3,0,1)+a_3(0,0,1,0)=(0,0,0)\Longrightarrow a_1=a_2=a_3=0$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
a_1(1,-1,0,0)+a_2(0,3,0,1)+a_3(0,0,1,0)=(0,0,0) &\Longrightarrow (a_1,3a_2-a_1,a_3,a_2)=(0,0,0)\\
&\Longrightarrow a_1=a_2=a_3=0
\end{aligned}
$$

Por tanto α *es una base de* $\mathbb{W}$.

(2) *A seguir verificamos si* α *es un base ortogonal, respecto del producto interno usual.*

$$
\begin{aligned}
\langle(1,-1,0,0),(0,0,1,0)\rangle &= 0\\
\langle(1,-1,0,0),(0,3,0,1)\rangle &= -3\\
\langle(0,3,0,1),(0,0,1,0)\rangle &= 0
\end{aligned}
$$

Luego, α *no es una base ortogonal, así que la ortogonalizamos vía G-S.*

$$
\begin{aligned}
v_1' &= (1,-1,0,0)\\
v_2' &= (0,0,1,0)\\
v_3' &= (0,3,0,1)-\frac{\langle(0,3,0,1),(0,0,1,0)\rangle}{\langle(0,0,1,0),(0,0,1,0)\rangle}(0,0,1,0)-\frac{\langle(0,3,0,1),(1,-1,0,0)\rangle}{\langle(1,-1,0,0),(1,-1,0,0)\rangle}(1,-1,0,0)\\
&= (0,3,0,1)+\frac{3}{2}(1,-1,0,0)\\
&= \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0,1\right)
\end{aligned}
$$

Así obtenemos la base ortogonal $\alpha'=\{(1,-1,0,0),(0,0,1,0),(3,3,0,2)\}$.

(3) *Finalmente procedemos a calcular la proyección ortogonal de* $\mathbb{R}^4$ *sobre* W. *Es decir* $P_{\mathbb{W}}:\mathbb{R}^4\longmapsto\mathbb{W}$ *tal que* $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\longmapsto P_{\mathbb{W}}(a,b,c,d)\in\mathbb{W}$

$$\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}}(a,b,c,d) &= \frac{\langle (a,b,c,d),(1,-1,0,0)\rangle}{\langle (1,-1,0,0),(1,-1,0,0)\rangle}(1,-1,0,0)+\frac{\langle (a,b,c,d),(0,0,1,0)\rangle}{\langle (0,0,1,0),(0,0,1,0)\rangle}(0,0,1,0)+\\
&\quad \frac{\langle (a,b,c,d),(3,3,0,2)\rangle}{\langle (3,3,0,2),(3,3,0,2)\rangle}(3,3,0,2)\\
&= \left(\frac{a-b}{2}\right)(1,-1,0,0)+c(0,0,1,0)+\left(\frac{3a+3b+2d}{22}\right)(3,3,0,2)\\
&= \left(\frac{a-b}{2}+\frac{9a+9b+6d}{22},\frac{b-a}{2}+\frac{9a+9b+6d}{22},c,\frac{3a+3b+2d}{11}\right)\\
&= \left(\frac{11a-11b+9a+9b+6d}{22},\frac{11b-11a+9a+9b+6d}{22},c,\frac{3a+3b+2d}{11}\right)\\
&= \left(\frac{20a-2b+6d}{22},\frac{20b-2a+6d}{22},c,\frac{3a+3b+2d}{11}\right)\\
&= \left(\frac{10a-b+3d}{11},\frac{10b-a+3d}{11},c,\frac{3a+3b+2d}{11}\right)
\end{aligned}$$

Observación 3.2. *Una técnica que nos ha dado buenos dividendos es que cada proceso que hacemos, dentro de lo posible, lo comprobamos a fin de asegurar la calidad y eficiencia del mismo, en este caso aún no tenemos mecanismos de control, pero procedamos a formalizarlos.*

Teorema 3.3. *Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, $\mathbb{W}\leq\mathbb{V}$ y $\alpha=\{w_1,w_2,\dots,s_s\}$, una base ortogonal de $\mathbb{W}$ entonces*

$$P_{\mathbb{W}}(w)=w\Longleftrightarrow w\in\mathbb{W}$$

En efecto

(1) *En primer lugar, $w=P_{\mathbb{W}}(w)\Longrightarrow w\in\mathbb{W}$. Pues, $Img(\mathbb{W})\subset\mathbb{W}$*

(2) *En segundo lugar, $w\in\mathbb{W}$ entonces como $\alpha=\{w_1,w_2,\dots,w_s\}$, una base ortogonal de $\mathbb{W}$ sigue que*

$$w \;=\; \sum_{i=1}^{s}\frac{\langle w,w_i\rangle}{\|w_i\|^2}\,w_i=P_{\mathbb{W}}(w)$$

En particular, $P_{\mathbb{W}}$ es una función sobreyectiva.

Corolario 3.3.1. *Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, $\mathbb{W}\leq\mathbb{V}$ y $\alpha=\{w_1,w_2,\dots,s_s\}$, una base ortogonal de $\mathbb{W}$ entonces $P_{\mathbb{W}}\circ P_{\mathbb{W}}=P_{\mathbb{W}}$.*
En efecto

$$(P_{\mathbb{W}}\circ P_{\mathbb{W}})(v)=P_{\mathbb{W}}(P_{\mathbb{W}}(v))=P_{\mathbb{W}}(v).\;\; \text{Pues } P_{\mathbb{W}}(v)\in\mathbb{W}\quad(\forall v;v\in\mathbb{V}).$$

Por tanto, $P_{\mathbb{W}}\circ P_{\mathbb{W}}=P_{\mathbb{W}}$.

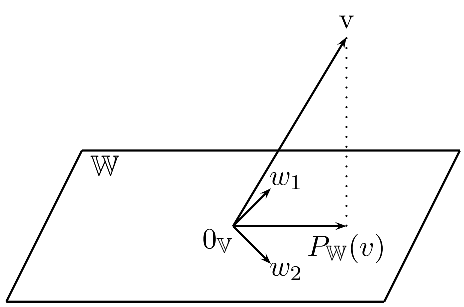
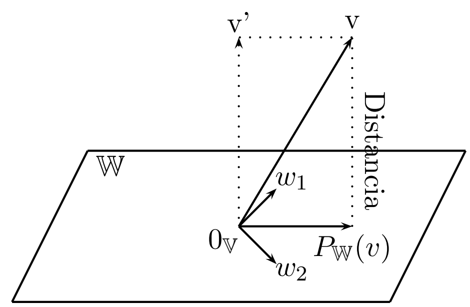
Ahora tenemos mecanismos de control para nuestro trabajo, y lo podemos probar en el **Ejemplo 3.1.1**. La proyección ortogonal que obtuvimos fue la siguiente:

$$P_{\mathbb{W}}(a,b,c,d)=\left(\frac{10a-b+3d}{11},\frac{10b-a+3d}{11},c,\frac{3a+3b+2d}{11}\right)$$

Si evaluamos entonces $P_{\mathbb{W}}$ en elementos de $\mathbb{W}$, este debe comportarse como la función identidad, es decir debe devolver el mismo elemento.

$$P_{\mathbb{W}}(1,-1,0,0) = \left(\frac{11}{11}, \frac{-11}{11}, 0, \frac{0}{11}\right) = (1,-1,0,0) \qquad \checkmark(\text{ OK})$$
$$P_{\mathbb{W}}(0,0,1,0) = \left(\frac{0}{11}, \frac{0}{11}, 1, \frac{0}{11}\right) = (0,0,1,0) \qquad \checkmark(\text{ OK})$$
$$P_{\mathbb{W}}(3,3,0,2) = \left(\frac{33}{11}, \frac{33}{11}, 0, \frac{22}{11}\right) = (3,3,0,2) \qquad \checkmark(\text{ OK})$$

Finalmente, Si volvemos a remirar el cuadro (10) entonces observamos que hemos resuelto dos de los tres problemas planteados en él, en efecto, construimos el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt, que esencialmente "consiste en controlar la sombra que un vector proyecta en un subespacio del espacio, es decir un vector anula a otro si su proyección en el es nula," y ahora el de la proyección del espacio en uno de sus subespacios, pero aún falta desarrollar la idea de distancia de un vector a un subespacio,en realidad debemos generalizar la idea de distancia entre vectores.
Para ello, reformulemos el cuadro (17)

Etapa 3. Modelo recontextualizado para proyección ortogonal	Etapa 3. Modelo recontextualizado para proyección ortogonal y distancia
 Figura7	 Figura8

(19)

Entonces usando toda la información tenemos las etapas:

Etapa 1. Del proceso de Gram Schmidt sigue que

$$v = v' + P_{\mathbb{W}}(v) \quad \wedge \quad \langle v', P_{\mathbb{W}} \rangle = 0 \tag{20}$$

Etapa 2. Aplicamos el concepto de norma a la ecuación definida en (20), para iniciar la construcción natural de una distancia.

$$v' = v - P_{\mathbb{W}}(v) \Longrightarrow \|v'\| = \|v - P_{\mathbb{W}}(v)\|$$

Esto motiva hacer la siguiente definición

Definición 3.4. *Si* $\mathbb{V}$ *es un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial con producto interno* $\langle , \rangle$, *y* $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ *entonces* $\|v - P_{\mathbb{W}}(v)\|$ *es la distancia del vector* v *al subespacio* $\mathbb{W}$.

Usaremos la notación: $d(v, \mathbb{W}) = \|v - P_{\mathbb{W}}(v)\|$

Ejemplo 3.4.1. *Si* $\mathbb{W} = \{(x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 3z = 0\}$ *entonces usando el producto interno usual determinemos* $d((x, y, z, t), \mathbb{W})$. *Conocemos del Ejemplo 3.1.1* $P_{\mathbb{W}}$. *Así que*

$$\begin{aligned}
\|(x,y,z,t) - P_{\mathbb{W}}(x,y,z,t)\| &= \left\|(x,y,z,t) - \left(\frac{10x - y + 3t}{11}, \frac{10y - x + 3t}{11}, z, \frac{3x + 3y + 2t}{11}\right)\right\| \\
&= \left\|\left(\frac{11x - 10x + y - 3t}{11}, \frac{11y - 10y + x - 3t}{11}, 0, \frac{11t - 3x - 3y - 2t}{11}\right)\right\| \\
&= \left\|\frac{x + y - 3t}{11}, \frac{y + x - 3t}{11}, 0, \frac{9t - 3x - 3y}{11}\right\| \\
&= \left\|\frac{x + y - 3t}{11}, \frac{y + x - 3t}{11}, 0, \frac{-3(x + y - 3t)}{11}\right\|
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
d((x,y,z,t), W) &= \sqrt{\left(\left[\frac{x + y - 3t}{11}\right]^2 + \left[\frac{y + x - 3t}{11}\right]^2 + \left[\frac{-3(x + y - 3t)}{11}\right]^2\right)} \\
&= \sqrt{\left(\left[\frac{x + y - 3t}{11}\right]^2 + \left[\frac{y + x - 3t}{11}\right]^2 + 9\left[\frac{(x + y - 3t)}{11}\right]^2\right)} \\
&= \sqrt{11\left[\frac{x + y - 3t}{11}\right]^2}
\end{aligned}$$

Podemos como antes, en base a nuestras propiedades, comprobar nuestro resultado:

$$d((1,-1,0,0), W) = \sqrt{11\left[\frac{1 - 1 - 0}{11}\right]^2} = 0$$

Observación 3.5. *Con las propiedades obtenidas para la proyección ortogonal, la distancia obtenida hereda naturalmente las siguientes propiedades:*

(1) $d(v, \mathbb{W}) \geq 0 \quad \wedge \quad d(v, \mathbb{W}) = 0 \Longleftrightarrow P_{\mathbb{W}}(v) = v$

(2) $P_{\mathbb{W}}(v) = v \Longleftrightarrow v \in \mathbb{W}$

(3) $d(v, \mathbb{W}) = 0 \Longleftrightarrow v \in \mathbb{W}$

4. Complemento Ortogonal

En esta sección estaremos interesados en emular el genial comportamiento del plano cartesiano, es decir queremos generalizar la idea

$$\mathbb{R}^2 = \underbrace{\langle\{(1,0)\}\rangle}_{\text{Eje x}} \oplus \underbrace{\langle\{(0,1)\}\rangle}_{\text{Eje } y}$$

Definición 4.1. *Sea* V *un* $\mathbb{K}$ *espacio con producto interno* $\langle , \rangle$, *y consideremos* $u \in V$ *y* $v \in V$. u *se dirá ortogonal a* v *si y sólo si* $\langle u, v\rangle = 0$.

Una notación adecuada para este contexto es: $u \perp v \Longleftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$

Lema 4.1.1. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio con producto interno $\langle,\rangle$, y $\mathbb{W}$ un subespacio de $\mathbb{V}$ entonces*

$$\mathbb{W}^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0\, (\forall w; w \in \mathbb{W})\}$$

es un subespacio de V.

En efecto

En primer lugar $\langle 0_{\mathbb{V}}, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in W)$. Así que, $0_v \in \mathbb{W}^{\perp}$

En segundo lugar, Si $u \in \mathbb{W}^{\perp} \wedge v \in \mathbb{W}^{\perp}$ entonces

$$\left.\begin{array}{lcl} u \in \mathbb{W}^{\perp} & \Longleftrightarrow & \langle u, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in \mathbb{W}) \\ v \in \mathbb{W}^{\perp} & \Longleftrightarrow & \langle v, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in \mathbb{W}) \end{array}\right\} \Rightarrow \langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle = 0 (\forall w; w \in \mathbb{W})$$

Así que $u + v \in \mathbb{W}^{\perp}$

Finalmente,para $\lambda \in \mathbb{K} \wedge v \in \mathbb{W}^{\perp}: \quad \langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle = \lambda 0 = 0 \quad (\forall w; w \in \mathbb{W})$

Luego, $\lambda v \in \mathbb{W}^{\perp}$ y $\mathbb{W}^{\perp}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Definición 4.2. *$\mathbb{W}^{\perp}$ será llamado " Complemento Ortogonal " de $\mathbb{W}$ en $(\mathbb{V}, \langle,\rangle)$.*

Ejemplo 4.2.1. *Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ y consideremos el producto interno canónico en $\mathbb{R}^3$ entonces*

$$\begin{aligned} w \in \mathbb{W} & \Longleftrightarrow w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x - y + z = 0 \\ & \Longleftrightarrow w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge z = -x - y \\ & \Longleftrightarrow w = (x, y, -x - y) \wedge [x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}] \\ & \Longleftrightarrow w = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \wedge [x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}] \\ & \Longleftrightarrow w \in \langle\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}\rangle \end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{W} = \langle\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}\rangle$. Así que en consecuencia

$$\mathbb{W}^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle v, (1, 0, -1)\rangle = 0 \wedge \langle v, (0, 1, -1)\rangle = 0\}$$

Y por tanto

$$\begin{aligned} v \in \mathbb{W}^{\perp} & \Longleftrightarrow v \in \mathbb{R}^3 \wedge \langle v, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in \mathbb{W}) \\ & \Longleftrightarrow v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge [\langle (x, y, z), (1, 0, -1)\rangle = 0 \wedge \\ & \qquad \langle (x, y, z), (0, 1, -1)\rangle = 0] \\ & \Longleftrightarrow v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge [x - z = 0 \wedge y - z = 0] \\ & \Longleftrightarrow v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x = y = z \\ & \Longleftrightarrow v = (x, x, x) \wedge x \in \mathbb{R} \\ & \Longleftrightarrow v = x(1, 1, 1) \wedge x \in \mathbb{R} \\ & \Longleftrightarrow v \in \langle\{(1, 1, 1)\}\rangle \end{aligned}$$

Así, $\mathbb{W}^{\perp} = \langle\{(1, 1, 1)\}\rangle$

Lema 4.3. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset (\mathbb{V} - \{0_V\})$ entonces*

$$v_i \perp v_j \quad i \neq j \Longrightarrow \alpha \text{ es un conjunto linealmente independiente en } V$$

En efecto

Supongamos que $\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0$ *para* $a_j \in \mathbb{K}; (1 \leq j \leq n)$ *entonces como ahora podemos multiplicar por* v_k, *y obtenemos:*

$$0 \;=\; \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j v_j, v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \langle v_j, v_k\rangle \quad (1 \leq k \leq n) = a_k \langle v_k, v_k\rangle, \qquad (\textit{Pues, } v_i \perp v_j \quad i \neq j)$$

Finalmente, como $v_k \neq 0 \Longrightarrow \langle v_k, v_k\rangle \neq 0$ *Así, que* $a_k = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$. *Lo que muestra que* α *es un conjunto linealmente independiente en* V.

Conclusión 4.4. *Antes de plantear algunos ejercicios, saludables para la comprensión de lo expuesto, quisiera concluir esta sección con algunas reflexiones según mi parecer de importancia capital.*

Reflexión 1

El modelamiento en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, *es fácil de hacer y de entender. Pues su "arquitectura" consiste apenas de un par de ejes perpendiculares y todas las traslaciones son inducidas justamente de esa forma.*

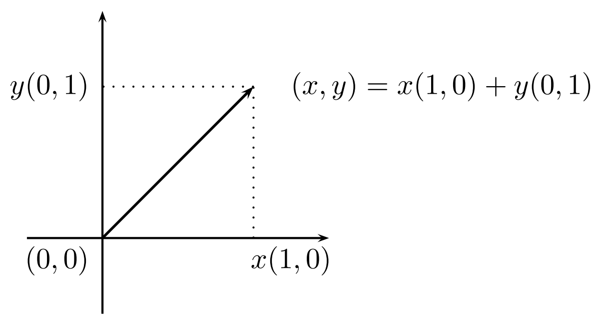


Figura9

En fin, todo el mundo entiende la expresión geométrica expuesta encima y por si fuera poco también la teórica:

$$(x,y) \;=\; x(1,0) + y(0,1) \tag{21}$$

Reflexión 2

La simpleza de $\mathbb{R}^2$ *radica en la posibilidad de construir la siguiente figura.*

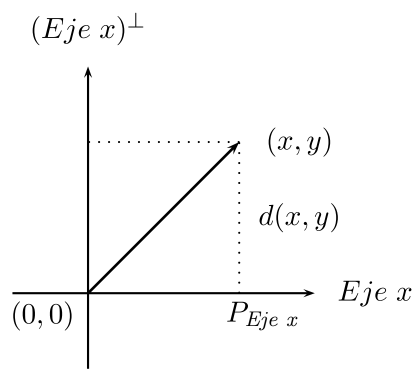


Figura 10

Así que quien simule esa ecuación geométrica es un $\mathbb{R}^2$ *en potencia.*

Reflexión 3

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n. Si $\mathbb{V}$ posee un producto interno entonces $\mathbb{V}$ "emula" el comportamiento de $\mathbb{K}^2$

En efecto

El algoritmo de simulación es el siguiente:

Sea $\mathbb{W}$ un subespacio de $\mathbb{V}$ y $\alpha = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ una base ortogonal de $\mathbb{W}$ entonces calculamos $\mathbb{W}^\perp$, como sigue:

- *Completamos α hasta obtener una base de $\mathbb{V}$, usando el teorema de completamiento de base o mejor, agregando vectores linealmente independientes a los w_i con $i = 1, \dots, s$ hasta llegar a la la dimensión n de $\mathbb{V}$; digamos*

$$\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$$

- *Usando el proceso de Gram Schmidt ortogonalizamos β y obtenemos*

$$\alpha' = \{w_1, w_2, \dots, w_s, w_{s+1}^\perp, \dots, w_n^\perp\} \tag{22}$$

De la propia construcción de α' en (22),sigue que vale la ecuación

$$\langle w_i^\perp, w_j\rangle = 0 \ si \ \begin{cases} i = s+1, s+2, \dots, n \\ j = 1, 2 \dots, s \end{cases}$$

Así que, para cualquier $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{\langle w, w_i\rangle}{||w_i||^2} w_i$ tenemos que

$$\langle w_j^\perp, w\rangle \ = \ \langle w_j^\perp, \sum_{i=1}^{s} \frac{\langle w, w_i\rangle}{||w_i||^2} w_i\rangle = \sum_{i=1}^{s} \frac{\overline{\langle w, w_i\rangle}}{||w_i||^2}\langle w_j^\perp, w_i\rangle = 0$$

Luego, $\{w_{s+1}^\perp, \dots, w_n^\perp\} \subset W^\perp$, así que por construcción

$$\langle\{w_{s+1}^\perp, \dots, w_n^\perp\}\rangle = \mathbb{W}^\perp$$

Finalmente

$$\mathbb{V} = \mathbb{W} \bigoplus \mathbb{W}^\perp$$

En realidad falta mostrar que $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp = \{0_V\}$.

Pero eso es claro pues:

$$\begin{aligned} v \in \mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp &\iff v \in \mathbb{W} \wedge v \in \mathbb{W}^\perp \\ &\iff v \in \mathbb{W} \wedge \langle v, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in \mathbb{W}) \\ &\iff v \in \mathbb{W} \wedge \langle v, v\rangle = 0 \\ &\iff v = 0_{\mathbb{V}} \end{aligned}$$

La visión geométrica de la emulación es:

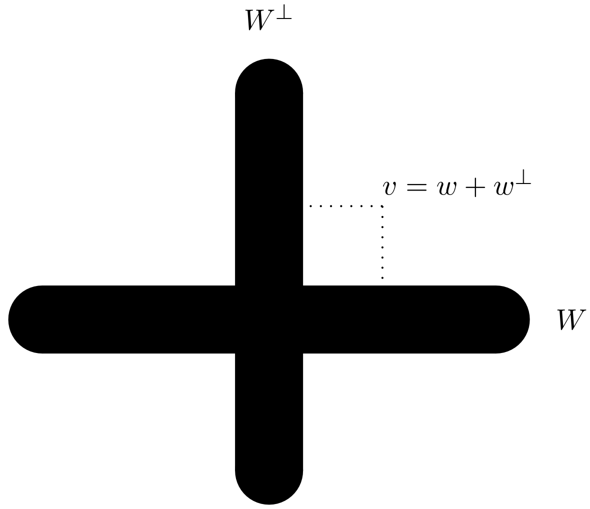


Figura 11: $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$

5. Ejercicios Propuestos Misceláneos de Producto Interno

(1) En $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, define la función:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 \tag{23}$$

Demuestre que f es un producto interno.

(2) A partir de la base canónica $c(2) = \{(1,0), (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, determine una base ortogonal $c(2)'$, respecto del producto interno definido en (23)

(3) Si $\alpha = \{(1,2), (2,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ entonces

(a) Demuestre que α es una base de $\mathbb{R}^2$.
(b) A partir de la base α, determine una base ortogonal α', respecto del producto interno usual.
(c) A partir de la base α, determine una base ortogonal α', respecto del producto interno definido en (23)

(4) Determine una base ortogonal, respecto del producto interno usual,para el subespacio.

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

(5) Si $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ entonces usando el producto interno usual

(a) Determine $W^{\perp}$
(b) Calcule $d((1,1,1), W)$
(c) Demuestre que $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^{\perp}$

(6) Si $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z - t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual

(a) Determine $W^{\perp}$
(b) Calcule $d((1,1,0,0), W)$
(c) Demuestre que $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^{\perp}$

(7) Si $W = \{(x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \wedge 2t + z = 0\}$ entonces usando el producto interno usual

(a) Determine $W^\perp$
(b) Calcule $d((2, 2, 3, -6), W)$
(c) Demuestre que $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$

(8) En el espacio de funciones $C[-\pi, \pi] = \{f : [-\pi, \pi] \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$. Define el producto.

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx \tag{24}$$

(a) Demuestre que (24), es un producto interno en $C[-\pi, \pi]$
(b) Demuestre que $f(n) = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \operatorname{sen} 3x, \cos 3x, \dots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\}$ es un conjunto ortogonal en $C[-\pi, \pi]$.
(c) Si $W(n) = \langle\{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \operatorname{sen} 3x, \cos 3x, \dots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\}\rangle$ calcule:

(i) $P_W(f)$ si $f(x) = x \; pi < x < \pi$

(ii) $P_W(f)$ si $f(x) = \begin{cases} 1 & : \text{ si } pi < x < 0 \\ -1 & : \text{ si } 0 < x < \pi \end{cases}$

(iii) $d(f, W)$, si $f(x) = x$

(9) En $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ define el producto.

$$\langle A, B\rangle = tr(B^t \cdot A) \tag{25}$$

(a) Demuestre que (25), es un producto interno en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

(b) Si $W = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\}$ entonces determine una base ortogonal de W, respecto del producto definido en (25)
(c) Determine P_W
(d) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ entonces calcule $d(A, W)$

6. Situaciones de Desempeño: Producto Interno

6.1. El objetivo de esta sección es presentar al Estudiante "Situaciones Problemáticas" que le permitan:

(♣) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.

(♣) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.

(♣) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos.

(♣) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.

(♣) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y "en lo posible haber aprehendido" de los tópicos analizados.

6.2. Algunas sugerencias para enfrentar las situaciones problemáticas son las siguientes:

($\star$) Lea cuidadosamente el problema.

($\star$) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.

($\star$) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos matemáticos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!!! Este acto nunca esta de más.

($\star$) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

6.3. Situaciones de Desempeño Propuestas:

(1) Si $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z - 2t = 0\} \leq \mathbb{R}^4$ entonces

   (a) Determine, una base ortogonal respecto del producto usual para el subespacio $\mathbb{W}$
   (b) Determine $\mathbb{W}^\perp$

(2) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n.

   (a) Demuestre que $\langle u, v\rangle = 0_{\mathbb{K}} \quad (\forall v, v \in \mathbb{V}) \Longrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$
   (b) Demuestre que $\langle u - v, w\rangle = 0_{\mathbb{V}} \quad (\forall w, w \in \mathbb{V}) \Longrightarrow u = v$

(3) Considere el subespacio $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$, determine $P_{\mathbb{W}}$.

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$.
Demuestre que $P_{\mathbb{W}}$ inyectiva $\Longrightarrow \mathbb{V} = \mathbb{W}$

(5) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \wedge z - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^3$

   (a) Determine $\mathbb{W}^\perp$

(b) ¿ Es $\mathbb{R}^3 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$?

(6) Considere en el espacio vectorial $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ el producto interno. $\langle A, B\rangle = Tr(B^tA)$, y el subespacio $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}\mathbb{R}(2) \mid A = A^t\}$. Determine una base ortonormal de $\mathbb{W}$.

(7) Si $(V, \langle , \rangle)$ es un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial entonces demuestre que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2]$$

(8) Si $\mathbb{W} = \{(1,1,1,1),(1,0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$ entonces usando el producto interno usual.

(a) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(b) Es posible que $\mathbb{R}^4 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$. Si su respuesta es afirmativa demuestre la afirmación, si es falsa de un contraejemplo.

(9) En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ define para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)\cdot q(0) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2) \qquad (*)$$

(a) Sea $\alpha = \{1, 1-x, 1-x^2\}$ base de $\mathbb{R}^2[x]$. Determine una base ortogonal respecto del producto interno definido en $(*)$

(b) Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \mid a_0 = 0\}$. Determine $\mathbb{W}^{\perp}$ respecto del producto interno definido en (26)

(c) Es posible que $\mathbb{R}_2[x] = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$. Si su respuesta es afirmativa demuestre la afirmación, si es falsa de un contraejemplo.

(10) Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n, y $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \subset (\mathbb{V} - \{0_{\mathbb{V}}\})$. Demuestre que

$$\alpha \text{ conjunto ortogonal respecto de } \langle , \rangle \implies \alpha \text{ conjunto linealmente independiente en } \mathbb{V}$$

(11) En $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio de polinomios hasta grado 2, considere el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\cdot q(x)\, dx \qquad (*)$$

(a) Determine una base ortonormal respecto del producto interno definido en $(*)$ a partir de la base canónica $pol(2) = \{1, x, x^2\}$

(b) Si $\mathbb{W} = \langle\{1\}\rangle$ entonces determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(12) Sea $\mathbb{V}, \langle , \rangle$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y sea $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si $\alpha' = \{u_1', u_2', \dots, u_n'\}$ es una base ortogonal respecto del producto interno $\langle , \rangle$ obtenida de la base α. Demuestre que

$$\alpha \text{ Base ortogonal} \iff \alpha = \alpha'$$

(13) Sea $\mathbb{V}, \langle , \rangle$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, y $\mathbb{W} \le \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\mathbb{W}^{\perp} = \{0_{\mathbb{V}}\} \iff \mathbb{W} = \mathbb{V}$$

7. Solución de Situaciones de Desempeño: Producto Interno

(1) Si $\mathbb{W} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z - 2t = 0\} \leq \mathbb{R}^4$ entonces

(a) Determinemos en primer lugar, una base ortogonal respecto del producto usual para el subespacio $\mathbb{W}$.

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} &\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x - 2y + z - 2t = 0 \\ &\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x = 2y - z + 2t \\ &\iff u = (2y - z + 2t, y, z, t) \\ &\iff u = y(2,1,0,0) + z(-1,0,1,0) + t(2,0,0,1) \\ &\iff u \in \langle \{(2,1,0,0), (-1,0,1,0), (2,0,0,1)\} \rangle \end{aligned}$$

Así que

$$\mathbb{W} = \langle \{(2,1,0,0), (-1,0,1,0), (2,0,0,1)\} \rangle$$

Por otra parte, $\alpha = \{(2,1,0,0), (-1,0,1,0), (2,0,0,1)\}$ es linealmente independiente, porque

$$\begin{aligned} a_1(2,1,0,0) + a_2(-1,0,1,0) + a_3(2,0,0,1) = 0_{\mathbb{R}^4} &\implies (2a_1 - a_2 + 2a_3, a_1, a_2, a_3) = (0,0,0,0) \\ &\implies a_1 = a_2 = a_3 = 0 \end{aligned}$$

Luego, α es linealmente independiente, y por ende, es una base de $\mathbb{W}$.

Ahora ortogonalizamos α utilizando el proceso de Gram-Schmidt.

$$\begin{aligned} v_1' &= (2,1,0,0) \\ v_2' &= (-1,0,1,0) - \frac{\langle(-1,0,1,0),(2,1,0,0)\rangle}{\langle(2,1,0,0),(2,1,0,0)\rangle}(2,1,0,0) \\ &= (-1,0,1,0) - \frac{-2}{5}(2,1,0,0) \\ &= (-1,0,1,0) + \frac{2}{5}(2,1,0,0) \\ &= (\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0) \\ v_3' &= (2,0,0,1) - \frac{\langle(2,0,0,1),(\frac{-2}{5},\frac{2}{5},1,0)\rangle}{\langle(\frac{-1}{5},\frac{2}{5},1,0),(\frac{-1}{5},\frac{2}{5},1,0)\rangle}(\frac{-1}{5},\frac{2}{5},1,0) - \frac{\langle(2,0,0,1),(2,1,0,0)\rangle}{\langle(2,1,0,0),(2,1,0,0)\rangle}(2,1,0,0) \\ &= (2,0,0,1) - \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{6}{5}}(\frac{-1}{5},\frac{2}{5},1,0) - \frac{\langle(2,0,0,1),(2,1,0,0)\rangle}{\langle(2,1,0,0),(2,1,0,0)\rangle}(2,1,0,0) \\ &= (2,0,0,1) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},1,0\right) - \frac{4}{5}(2,1,0,0)\ldots.. \end{aligned}$$

Luego, $\alpha' = \{v_1', v_2', v_3'\}$, es una base ortogonal

Determine $\mathbb{W}^\perp$

Solución

$$\begin{aligned}
u \in \mathbb{W}^{\perp} &\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \langle u, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in \mathbb{W}) \\
&\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \langle (x,y,z,t),(2,0,0,1)\rangle = 0 \wedge \quad \langle (x,y,z,t),(-1,0,1,0)\rangle = 0 \wedge \\
&\qquad \langle (x,y,z,t),(2,1,0,0)\rangle = 0 \\
&\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge 2x + t = 0 \wedge \quad z - x = 0 \wedge 2x + y = 0 \\
&\iff u = (x,y,z,t) \wedge t = -2x \wedge z = x \wedge y = -2x \\
&\iff u = (x,-2x,x,-2x) \\
&\iff \mathbb{W}^{\perp} = \langle\{(1,-2,1,-2)\}\rangle
\end{aligned}$$

(2) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n.

(a) Demuestre que $\langle u, v\rangle = 0_{\mathbb{K}} \quad (\forall v, v \in \mathbb{V}) \Longrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$

Solución

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle = 0_{\mathbb{V}} \quad (\forall v, v \in \mathbb{V}) &\Longrightarrow \langle u, u\rangle = 0_{\mathbb{V}} \\
&\Longrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}
\end{aligned}$$

(b) Demuestre que $\langle u - v, w\rangle = 0_{\mathbb{V}} \quad (\forall w, w \in \mathbb{V}) \Longrightarrow u = v$

Solución

Por el item anterior. $u - v = 0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow u = v$

(3) Considere el subespacio $\mathbb{W} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$, determine $P_{\mathbb{W}}$.

Solución

Etapa 1. Determinamos una base ortogonal de $\mathbb{W}$

$$\begin{aligned}
u \in \mathbb{W} &\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x + y + z + t = 0 \\
&\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge t = -x - y - z \\
&\iff u = (x,y,z,-x-y-z);\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \\
&\iff u = x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1);\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \langle\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}\rangle$$

Si $\alpha = \{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$ entonces α es una base de $\mathbb{W}$, pues son claramente Linealmente independientes.

Ahora, ortogonalizamos, porque α no es base ortogonal.

$$
\begin{aligned}
v_1' &= (1,0,0,-1)\\
v_2' &= (0,1,0,-1) - \frac{\langle (0,1,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}{\langle (1,0,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}(1,0,0,-1)\\
&= (0,1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,0,0,-1)\\
&= \left(-\frac{1}{2},1,0,-\frac{1}{2}\right) \quad \text{tomaremos } v_2' = (-1,2,0,-1)\\
v_3' &= (0,0,1,-1) - \frac{\langle (0,0,1,-1),(-1,2,0,-1)\rangle}{\langle (-1,2,0,-1),(-1,2,0,-1)\rangle}(-1,2,0,-1) -\\
& \frac{\langle (0,0,1,-1),(1,0,0,-1)\rangle}{\langle (1,0,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}(1,0,0,-1)\\
&= (0,0,1,-1) - \frac{1}{6}(-1,2,0,-1) - \frac{1}{2}(1,0,0,-1)\\
&= \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1,-\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\alpha' = \{(1,0,0,-1),(-1,2,0,-1),(-1,-1,3,-1)\} \quad \text{es una base ortogonal de } \mathbb{W}
$$

Ahora definimos la proyección ortogonal

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}}(x,y,z,t) &= \frac{\langle (x,y,z,t),(1,0,0,-1)\rangle}{\langle (1,0,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}(1,0,0,-1) + \frac{\langle (x,y,z,t),((-1,2,0,-1))\rangle}{\langle (-1,2,0,-1),(-1,2,0,-1)\rangle}(-1,2,0,-1) +\\
& \frac{\langle (x,y,z,t),(-1,-1,3,-1)\rangle}{\langle (-1,-1,3,-1),(-1,-1,3,-1)\rangle}(-1,-1,3,-1)\\
&= \frac{(x-t)}{2}(1,0,0,-1) + \frac{(2y-x-t)}{6}(-1,2,0,-1) + \frac{(3z-x-y-t)}{12}(-1,-1,3,-1)
\end{aligned}
$$

Podemos comprobar directamente que

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}}(1,0,0,-1) &= (1,0,0,-1)\\
P_{\mathbb{W}}(-1,2,0,1) &= (-1,2,0,1)\\
P_{\mathbb{W}}(-1,-1,3,1) &= (-1,-1,3,1)
\end{aligned}
$$

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$.

Demuestre que $P_{\mathbb{W}}$ inyectiva $\Longrightarrow \mathbb{V} = \mathbb{W}$

Solución

Sabemos que $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$, así que en particular $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$.

Recíprocamente, si $u \in \mathbb{V}$ entonces $P_{\mathbb{W}}(u) = w_0 \in \mathbb{W}$. Por otra parte, como $w_0 \in \mathbb{W}$ entonces $P_{\mathbb{W}}(w_0) = w_0$. Así que juntando la información obtenemos que

$$u \in \mathbb{V} \Longrightarrow P_{\mathbb{W}}(u) = w_0 \in \mathbb{W} \Longrightarrow P_{\mathbb{W}}(u) = P_{\mathbb{W}}(w_0) \Longrightarrow \quad u = w_0 \in \mathbb{W} \Longrightarrow \mathbb{V} \subset \mathbb{W}$$

Por tanto $\mathbb{V} = \mathbb{W}$.

(5) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \wedge z - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^3$

(a) Determine $\mathbb{W}^\perp$

Solución

Etapa 1. Determinamos el conjunto $\mathbb{W}$.

$$\begin{aligned} w \in \mathbb{W} &\iff w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \wedge a - b = 0 \wedge c - 1 = 0 \\ &\iff w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \wedge a = b \wedge c = 1 \\ &\iff w = (a, a, 1);\ a \in \mathbb{R} \qquad\qquad (*) \end{aligned}$$

Así que $\mathbb{W} = \{(a, a, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$

Etapa 2. Ahora, determinamos el subespacio $\mathbb{W}^\perp$.

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W}^\perp &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge \langle u, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in \mathbb{W}) \\ &\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge \langle (x, y, z), (b, b, 1)\rangle = 0 \quad (\forall b; b \in \mathbb{R}) \qquad \text{(Usando } (*)\text{)} \\ &\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge bx + by + z = 0 \\ &\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge z = -bx - by \\ &\iff u = (x, y, -bx - by)(\forall b; b \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \langle (x, y, -bx - by), (a, a, 1)\rangle = 0 \quad (\forall a; a \in \mathbb{R}) &\iff ax + ay - bx - by = 0 \\ &\iff (a - b)(x + y) = 0 \\ &\iff (x + y) = 0 \\ &\iff y = -x \end{aligned}$$

Por tanto

$$u \in \mathbb{W}^\perp \iff u = x(1, -1, 0) \quad x \in \mathbb{R}$$

Así que $\mathbb{W}^\perp = \langle\{(1, -1, 0)\}\rangle$

(b) ¿ Es $\mathbb{R}^3 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$?

Solución

No es posible, pues $\mathbb{W}$ no es un subespacio.

(6) Considere en el espacio vectorial $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ el producto interno. $\langle A, B\rangle = Tr(B^t A)$, y el subespacio $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}\mathbb{R}(2) \mid A = A^t\}$. Determine una base ortonormal de $\mathbb{W}$.

Solución

Etapa 1. Determinamos una base de $\mathbb{W}$

$$
\begin{aligned}
A \in \mathbb{W} \quad &\Longleftrightarrow \quad A \in \mathbb{MR}(2) \ \wedge \ A = A^t \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ \wedge \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ \wedge \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ \wedge \ b = c \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}; (a,b,d) \in \mathbb{R}^3 \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Así que $\mathbb{W} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

Ahora, si llamamos $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ entonces α es una base de $\mathbb{W}$.

En efecto

$$
a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = b = d = 0
$$

Así que α, genera y es un conjunto linealmente independiente por tanto es una base.

Etapa 2. Verificamos si α es o no una base ortogonal

$$
\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Luego, α es una base ortogonal

Etapa 3. Verificamos si α es una base ortonormal

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Como,

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \Longrightarrow \left\|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| = 1$$

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= 2\end{aligned}$$

Como,

$$\left\|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \Longrightarrow \left\|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Como,

$$\left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \Longrightarrow \left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\| = 1$$

Finalmente, una base ortonormal es:

$$\alpha' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(7) Si $(V, \langle, \rangle)$ es un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial entonces demuestre que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2]$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2] &= \frac{1}{4}[\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle] \\
&= \frac{1}{4}[\langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle - (\langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle)] \\
&= \frac{1}{4}[4\langle u,v\rangle] \\
&= \langle u,v\rangle
\end{aligned}$$

(8) Si $\mathbb{W} = \{(1,1,1,1),(1,0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$ entonces usando el producto interno usual.

(a) Determine $\mathbb{W}^\perp$

Solución

$$\begin{aligned}
u \in \mathbb{W}^\perp &\iff u \in \mathbb{R}^4 \wedge [\langle u, (1,1,1,1)\rangle = 0 \wedge \langle u, (1,0,0,1)\rangle = 0] \\
&\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge [\langle (x,y,z,t), (1,1,1,1)\rangle = 0 \wedge \langle (x,y,z,t), (1,0,0,1)\rangle = 0] \\
&\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge [x+y+z+t = 0 \wedge x+t = 0] \\
&\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge [z = -y \wedge t = -x] \\
&\iff u = (x,y,-y,-x) \wedge (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\
&\iff u = x(1,0,0,-1) + y(0,1,-1,0) \wedge (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\
&\iff u \in \langle\{(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\}\rangle
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W}^\perp = \langle\{(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\}\rangle$$

Como siempre, es necesario aplicar el proceso de control, que aquí significa comprobar nuestro resultado:

$$\begin{aligned}
\langle(1,1,1,1),(1,0,0,-1)\rangle &= 0 \\
\langle(1,1,1,1),(0,1,-1,0)\rangle &= 0 \\
\langle(1,0,0,1),(1,0,0,-1)\rangle &= 0 \\
\langle(1,0,0,1),(0,1,-1,0)\rangle &= 0
\end{aligned}$$

(b) Es posible que $\mathbb{R}^4 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$. Si su respuesta es afirmativa demuestre la afirmación, si es falsa de un contraejemplo.

Solución

No es posible pues $\mathbb{W}$ no es un subespacio, ya que es finito y no nulo.

(9) En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ define para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)\cdot q(0) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2) \qquad (*)$$

(a) Sea $\alpha = \{1, 1-x, 1-x^2\}$ base de $\mathbb{R}^2[x]$. Determine una base ortogonal respecto del producto interno definido en (26)

Solución
En primer lugar verificamos la ortogonalidad de $\alpha = \{1, 1-x, 1-x^2\}$.

$$\begin{aligned}
\langle 1, 1-x\rangle &= 1\cdot(1-0) + 1\cdot(1-1) + 1\cdot(1-2) = 1+0-1 = 0\\
\langle 1, 1-x^2\rangle &= 1\cdot(1-0^2) + 1\cdot(1-1^2) + 1\cdot(1-2^2) = 1+0-3 = -2\\
\langle 1-x, 1-x^2\rangle &= (1-0)\cdot(1-0^2) + (1-1)\cdot(1-1^2) + (1-2)\cdot(1-2^2) = 4
\end{aligned}$$

Como α no es una base ortogonal entonces aplicamos Gram Schmidt para obtener α' una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$.
Sea entonces

$$\begin{aligned}
v_1' &= 1\\
v_2' &= 1-x\\
v_3' &= (1-x^2) - \frac{\langle (1-x^2), (1-x)\rangle}{\langle (1-x), (1-x)\rangle}\cdot(1-x) - \frac{\langle (1-x^2), 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\cdot 1\\
&= (1-x^2) - \frac{4}{\langle (1-x), (1-x)\rangle}\cdot(1-x) - \frac{-2}{\langle 1, 1\rangle}\cdot 1\\
&= (1-x^2) - \frac{4}{2}\cdot(1-x) + \frac{2}{3}\cdot 1\\
&= 1 - x^2 - 2 + 2x + \frac{2}{3}\\
&= -\frac{1}{3} + 2x - x^2
\end{aligned}$$

Así que una base α' ortogonal es

$$\alpha' = \left\{1, 1-x, -\frac{1}{3} + 2x - x^2\right\}$$

Para concluir, debemos aplicar el mecanismo de control

$$
\begin{aligned}
\langle 1, 1-x\rangle &= 0\\
\left\langle 1, -\frac{1}{3}+2x-x^2\right\rangle &= 1\cdot\left(-\frac{1}{3}+0-0^2\right)+1\cdot\left(-\frac{1}{3}+2-1^2\right)+1\cdot\left(-\frac{1}{3}+4-2^2\right)\\
&= -\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\\
&= 0\\
\left\langle (1-x), -\frac{1}{3}+2x-x^2\right\rangle &= 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+0+\frac{1}{3}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

(b) Si $\mathbb{W}=\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbb{R}^2[x]\mid a_0=0\}$. Determine $\mathbb{W}^\perp$ respecto del producto interno definido en (26)

Solución

$$
\begin{aligned}
p(x)\in\mathbb{W} &\iff p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge a_0=0\\
&\iff p(x)=a_1x+a_2x^2\wedge(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \langle x, x^2\rangle$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
q(x)\in\mathbb{W}^\perp &\iff q(x)\in\mathbb{R}_2[x]\wedge[\langle q(x),x\rangle=0\wedge\langle q(x),x^2\rangle=0]\\
&\iff q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge \left.\begin{array}{rcl} q(0)\cdot 0+q(1)\cdot 1+q(2)\cdot 2 &=& 0\\ q(0)\cdot 0^2+q(1)\cdot 1^2+q(2)\cdot 2^2 &=& 0\end{array}\right|\\
&\Longrightarrow q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge \left.\begin{array}{rcl} q(1)+2q(2) &=& 0\\ q(1)+4q(2) &=& 0\end{array}\right|\\
&\Longrightarrow q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge 2q(2)=0\\
&\Longrightarrow q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge q(2)=q(1)=0\\
&\Longrightarrow q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge b_0+b_1+b_2=0\wedge b_0+2b_1+4b_2=0\\
&\Longrightarrow q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge b_0=2b_2\wedge b_1=-3b_2\\
&\Longrightarrow q(x)=2b_2-3b_2x+b_2x^2\wedge b_2\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\mathbb{W}^\perp = \langle\{2-3x+x^2\}\rangle$$

Debemos comprobar:

$$
\begin{aligned}
\langle 2-3x+x^2, x\rangle &= 0+(2-3+1)\cdot 1+(2-6+4)\cdot 2=0\\
\langle 2-3x+x^2, x^2\rangle &= 0+(2-3+1)\cdot 1^2+(2-6+4)\cdot 4=0
\end{aligned}
$$

(c) Es posible que $\mathbb{R}_2[x]=\mathbb{W}\oplus\mathbb{W}^\perp$. Si su respuesta es afirmativa demuestre la afirmación, si es falsa de un contraejemplo.

Solución

como $\alpha=\{x,x^2,2-3x+x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$ entonces cualquier polinomio $h(x)\in\mathbb{R}_2[x]$ se escribe únicamente como

$$h(x) = \underbrace{a_0x+a_1x^2}_{\in\mathbb{W}}+\underbrace{a_2(2-3x+x^2)}_{\in\mathbb{W}^\perp}$$

(10) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ e. v. de dimensión n con producto interno $\langle , \rangle$, y sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset (\mathbb{V} - \{0_{\mathbb{V}}\})$. Demuestre que

$$\alpha \text{ conjunto ortogonal respecto de } \langle , \rangle \quad \Longrightarrow \quad \alpha \text{ conjunto linealmente independiente en } \mathbb{V}$$

Solución: Por demostrar que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0 \Longrightarrow a_j = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

En efecto

Supongamos que $\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0 \quad a_j \in \mathbb{K}; (1 \leq j \leq n)$ entonces como ahora podemos multiplicar, lo hacemos e.e.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \sum_{j=1}^{n} a_j v_j, v_k \rangle \quad (1 \leq k \leq n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \langle v_j, v_k \rangle \quad (1 \leq k \leq n) \\ &= a_k \langle v_k, v_k \rangle \qquad (\text{recordar que } v_i \perp v_j \quad i \neq j) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$v_k \neq 0 \Longrightarrow \langle v_k, v_k \rangle \neq 0$$

Así, que $a_k = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$. Lo que muestra que α es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{V}$.

(11) En $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio de polinomios hasta grado 2, considere el producto interno

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x)\, dx \qquad (*)$$

(a) Determine una base ortonormal respecto del producto interno definido en $(*)$ a partir de la base canónica $pol(2) = \{1, x, x^2\}$

Solución

En primer lugar, verificamos la ortogonalidad de $pol(2)$ respecto del producto definido en $(*)$

$$\begin{aligned} \langle 1, x \rangle &= \int_{-1}^{1} x\, dx = \frac{x^2}{2}|_{-1}^{1} = 0 \\ \langle 1, x^2 \rangle &= \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{x^3}{3}|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \\ \langle x, x^2 \rangle &= \int_{-1}^{1} x^3\, dx = \frac{x^4}{4}|_{-1}^{1} = 0 \end{aligned}$$

Luego, $pol(2)$ no es una base ortogonal, así que aplicamos G-S. Sea

$$\begin{aligned} u_1' &= 1 \\ u_2' &= x \\ u_3' &= x^2 - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle}x - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\cdot 1 = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2}\cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Luego,

$$pol(2)' = \left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$$

Es una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ pues,

$$\begin{aligned} \langle 1, x\rangle &= \int_{-1}^{1} x\, dx = \frac{x^2}{2}|_{-1}^{1} = 0 \\ \left\langle 1, x^2 - \frac{1}{3}\right\rangle &= \int_{-1}^{1} x^2\, dx - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \\ \left\langle x, x^2 - \frac{1}{3}\right\rangle &= \int_{-1}^{1} x^3\, dx - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x\, dx = 0 \end{aligned}$$

Finalmente, basta dividir por la norma para , obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$

(b) Si $\mathbb{W} = \langle\{1\}\rangle$ entonces determine $\mathbb{W}^{\perp}$

Solución

$$\begin{aligned} p(x) \in \mathbb{W}^{\perp} &\iff p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge \langle p(x), 1\rangle = 0 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge \langle a_0 + a_1x + a_2x^2, 1\rangle = 0 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge \int_{-1}^{1}(a_0 + a_1x + a_2x^2)\, dx = 0 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge \left(a_0\int_{-1}^{1} dx + a_1\int_{-1}^{1} x\, dx = 0 + a_2\int_{-1}^{1} x^2\, dx\right) = 0 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge \left(2a_0 + \frac{2}{3}a_2\right) = 0 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge a_2 = -3a_0 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x - 3a_0x^2 \wedge (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \\ &\iff p(x) = a_0(1 - 3x^2) + a_1x \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W}^{\perp} = \left\langle\{(1 - 3x^2), x\}\right\rangle$$

(12) Sea $\mathbb{V}, \langle,\rangle$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y sea $\alpha = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si $\alpha' = \{u_1', u_2', \ldots, u_n'\}$ es una base ortogonal respecto del producto interno $\langle,\rangle$ obtenida de la base α. Demuestre que

$$\alpha \text{ Base ortogonal} \iff \alpha = \alpha'$$

Solución
Si α es una base ortogonal entonces sabemos que:

$$\alpha \text{ Base ortogonal} \iff \langle v_i, v_j\rangle = 0 \text{ si } i \neq j \wedge (1 \leq i \leq n)(1 \leq j \leq n)$$

Además si $v_1' = v_1$ entonces

$$\begin{aligned} v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle}v_1' = v_2 - 0 \cdot v_1' = v_2 \\ v_3' &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}v_2 - \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 = v_3 - 0 \cdot v_2 - o \cdot v_1 = v_3 \\ &\vdots \\ v_n' &= v_n - \frac{\langle v_n, v_{n-1}\rangle}{\langle v_{n-1}, v_{n-1}\rangle}v_{n-1} - \cdots - \frac{\langle v_n, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 = v_n \end{aligned}$$

Así que $\alpha = \alpha'$

Reciprocamente, si $\alpha = \alpha'$ y como $^{\circ}alpha'$ es base ortogonal entonces α es base ortogonal

(13) Sea $\mathbb{V}, \langle , \rangle$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\mathbb{W}^{\perp} = \{0_{\mathbb{V}}\} \iff \mathbb{W} = \mathbb{V}$$

Solución

Sabemos que si $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ entonces $\mathbb{V} = W \oplus \mathbb{W}^{\perp}$. Así que si $\mathbb{W}^{\perp} = \{0_{\mathbb{V}}\}$ entonces

$$\mathbb{V} = W \oplus \mathbb{W}^{\perp} = W \oplus \{0_{\mathbb{V}}\} = \mathbb{W}$$

Recíprocamente, si $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ entonces

$$\mathbb{V} = W \oplus \mathbb{W}^{\perp} = \mathbb{V} \oplus \mathbb{V}^{\perp} \Longrightarrow W^{\perp} = \{0_{\mathbb{V}}\} = \mathbb{W}$$

Pues, $\langle w, v\rangle = 0 \quad (\forall v; v \in \mathbb{V}) \Longrightarrow \langle w, w\rangle = 0 \Longrightarrow w = 0_{\mathbb{V}}$

8. Aplicación 1: Método de Aproximación de los Mínimos Cuadrados

8.1. Planteamiento del Problema. Si $y = f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$, y conocemos sólo n valores de ella , $f(x_i) = y_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq n$, entonces
¿ Cómo conseguir, si es posible, una curva que pase por los puntos $P_i = (x_i, y_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$? y que cumpla con las particularidades de la función f, salvo probablemente cometiendo errores controlados.

8.2. Herramientas Básicas 1: Sistemas de Ecuaciones. Si consideramos un sistema lineal de orden $(n \times m)$

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right| \tag{26}$$

entonces sabemos que

1. El sistema (26) tiene una notación equivalente usando matrices en la forma $AX = B$, donde

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

2. (26) tiene solución si el rango de la matriz de coeficientes A es el mismo de la matriz ampliada $(A|B)$, es decir $\rho(A) = \rho(A|B)$

Ejemplo 8.2.1. *Dado el sistema lineal*

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}\right|$$

Conforme a lo que hemos expuesto encima:

1. *En notación matricial tenemos que*

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. *Calculando el rango de la matriz ampliada* $(A|B)$

$$\begin{array}{rcc} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) & (l_1 \leftrightarrow l_2) & \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \\ & (l_2 \leftrightarrow l_2 - 2l_1) & \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \\ & (l_2 \to \frac{1}{3}l_2) & \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \\ & (l_1 \to l_1 + l_2) & \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

   Verificamos que hay solución pues, $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$

3. *Como* $\rho(A) = \rho(A|B) = 2 < 3$ *entonces tenemos infinitas soluciones para el sistema del tipo*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.2.2. *Dado el sistema lineal*

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right| \tag{27}$$

Procedemos como en el ejemplo (8.2.1) *y,*

1. *En notación matricial tenemos que*

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. *Calculando el rango de la matriz ampliada* $(A|B)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 4 & 2 & -2 & | & 3 \end{pmatrix} \quad (l_1 \leftrightarrow l_2) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 4 & 2 & -2 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}(l_2 \leftrightarrow l_2 - 2l_1) \\ (l_3 \leftrightarrow l_3 - 4l_1)\end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 3 & -3 & | & -3 \\ 0 & 6 & -6 & | & -5 \end{pmatrix}$$

$$(l_2 \to \tfrac{1}{3} l_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 6 & -6 & | & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}(l_1 \to l_1 + l_2) \\ (l_3 \to l_3 - 6l_2)\end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}(l_1 \to l_1 - l_3) \\ (l_2 \to l_2 + l_3)\end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Verificamos que no hay solución pues, $\rho(A) = 2$ *y* $\rho(A|B) = 3$

3. *Como* $\rho(A) \neq \rho(A|B)$ *entonces no hay solución.*

8.3. Herramientas Básicas 2: Espacios Vectoriales. Hasta ahora el criterio a usar, para que un sistema tenga o no tenga solución es comparar mecánicamente dos números, más específicamente el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada, ambas asociada al sistema lineal dado. Como puede ser rápidamente deducido esta técnica no permite una mayor elucubración teórica, así que debemos intentar traducir este comportamiento a través de las ricas y fructificas propiedades que poseen los espacios vectoriales.

Para ello, observamos que las columnas de una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ son elementos del espacio vectorial $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$, y en este nuevo contexto el siguiente teorema es una caracterización (una nueva formulación) del Teorema del Rango.

Teorema 8.3.1. (*Caracterización del Teorema del Rango*) *El sistema* (26) *tiene solución si y sólo si* B *pertenece al espacio generado por las columnas de* A.

En efecto, como

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right| \Longleftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

entonces es claro que,

$$(26) \text{ tiene solución} \iff B \in \Omega(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Ejemplo 8.3.2. *El sistema del ejemplo* (8.2.1) *tiene solución, como visto encima, y por ejemplo*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O mejor, para cada $x_3 \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1 + x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.3.3. *El sistema* (8.2.2) *no tiene solución, como visto encima, y podemos directamente ver que,*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow 1 = \frac{3}{2} \quad (\Longrightarrow \Longleftarrow)$$

Si consideramos un sistema lineal como el sistema (26) entonces Del teorema (8.3.1), sigue que el sistema (26) no tiene solución si y sólo si $B \notin \Omega(A)$. Por tanto se torna clave el subespacio $\Omega(A)$ de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$, y entonces direccionemos nuestras ideas hacia este conjunto:

1. En primer lugar, usaremos en el espacio vectorial $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$ su producto interno canónico es decir,

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

2. Si $P_{\Omega(A)} : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \longmapsto \Omega(A)$ representa la proyección ortogonal de B en el subespacio $\Omega(A)$ entonces

$$P_{\Omega(A)}(B) \in \Omega(A)$$

y, aplicando nuevamente el teorema (8.3.1) existe $\widehat{X} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times 1)$ tal que

$$A \cdot \widehat{X} \;=\; P_{\Omega(A)}(B) \tag{28}$$

3. La distancia $d(B, \Omega(A)) = \|B - P_{\Omega(A)}(B)\| = \sqrt{\langle B - P_{\Omega(A)}(B), B - P_{\Omega(A)}(B) \rangle}$, es la menor posible, es decir. $B - P_{\Omega(A)}(B) \in \Omega(A)^{\perp}$ por tanto si notamos las columnas de A, de la forma:

$$col_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \qquad (1 \leq j \leq m)$$

entonces

$$\left\langle col_j(A), B - P_{\Omega(A)}(B) \right\rangle = 0 \qquad (1 \leq j \leq m)$$

Equivalentemente

$$
\begin{aligned}
0 &= col_j(A)^t \cdot (B - P_{\Omega(A)}(B)) \qquad (1 \leq j \leq m)\\
&= col_j(A)^t \cdot B - col_j(A)^t \cdot P_{\Omega(A)}(B) \qquad (1 \leq j \leq m)\\
&\overset{(28)}{=} col_j(A)^t \cdot B - col_j(A)^t A \cdot \widehat{X} \qquad (1 \leq j \leq m)
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
B - P_{\Omega(A)}(B) \in \Omega(A)^{\perp} \iff A^t \cdot B = A^t A \cdot \widehat{X} \tag{29}
$$

8.4. Herramienta Central.

Definición 8.4.1. *Dado un sistema lineal de orden $(n \times m)$, tal como el definido en (26) entonces cualquier solución de la ecuación matricial,*

$$
A^t A \cdot \widehat{X} = A^t \cdot B \tag{30}
$$

será llamada una solución por mínimos cuadrados de (26)

Teorema 8.4.2. *Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$. Si $\rho(A) = m$, (donde $\rho(A)$ es el rango de la matriz A) entonces $A^t \cdot A$ es invertible y el sistema lineal asociado a la matriz A, tiene una única solución por mínimos cuadrados dada por:*

$$
\widehat{X} = (A^t \cdot A)^{-1} A^t B
$$

En efecto, sabemos por definición que,

$$
U \quad invertible \iff \ker(U) = \{(0)\} \iff U \cdot X = (0) \Longrightarrow X = (0)
$$

entonces usando esta equivalencia obtenemos,

$$
\begin{aligned}
A^t \cdot A \cdot X = (0) &\Longrightarrow \langle X, A^t \cdot A \cdot X\rangle = 0 \Longrightarrow X^t \cdot A^t \cdot A \cdot X = 0 \Longrightarrow (A \cdot X)^t \cdot A \cdot X = 0\\
&\Longrightarrow \langle A \cdot X, A \cdot X\rangle = (0) \Longrightarrow A \cdot X = 0\\
&\Longrightarrow x_1 \cdot col_1(A) + x_2 \cdot col_2(A) + \cdots + x_n \cdot col_n(A) = 0\\
&\Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0, \qquad \textit{(las columnas de A son linealmente independientes)}\\
&\Longrightarrow X = (0)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8.4.3. *Consideremos el sistema lineal*

$$
\begin{array}{rcrcrcr|}
x & + & 4y & - & 5z & = & 3\\
2x & + & y & - & z & = & 2\\
-x & + & 2y & - & 3z & = & 1\\
-2x & + & 4y & - & 6z & = & 7\\
\hline
\end{array} \tag{31}
$$

(1) *El sistema* (31) *se escribe matricialmente como*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}}_{B} \tag{32}$$

(2) *Calculamos* $\rho(A)$, *escalonando la matriz* A *por filas:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} (L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \longrightarrow L_3 + L_1) \\ (L_4 \longrightarrow L_2 + 2L_1) \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & -7 & 9 & -4 \\ 0 & 6 & -8 & 4 \\ 0 & 12 & -16 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(L_4 \longrightarrow L_4 - 2L_3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & -7 & 9 & -4 \\ 0 & 6 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego, $\rho(A) = 3$ *y* $\rho(A_a) = 4$, *así que por una parte* $\rho(A)$ *es máximo y por otra el sistema* (31) *no tiene solución.*

(3) *De acuerdo al teorema (8.4.2),* $A^t \cdot A$ *es invertible y la ecuación* $A^t \cdot A \cdot X = A^t \cdot B$, *tiene solución única. Así que tenemos alternativa: Escalonar para aplicar el teorema del rango, o bien calcular directamente* $(A^t \cdot A)^{-1}$. *Optaremos por la primera y entonces debemos armar el sistema a resolver.*

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ -5 & -1 & -3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -4 & 37 & -51 \\ 8 & -51 & 47 \end{pmatrix}$$

Además,

$$A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ -5 & -1 & -3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 44 \\ -62 \end{pmatrix}$$

Así que debemos resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -4 & 37 & -51 \\ 8 & -51 & 47 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 44 \\ -62 \end{pmatrix} \tag{33}$$

(4) *Finalmente resolvemos el sistema lineal* (33), *escalonando su matriz ampliada correspondiente:*

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 & -8 \\ -4 & 37 & -51 & 44 \\ 8 & -51 & 47 & -62 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.36936168 \\ 0 & 1 & 0 & 1.31037985 \\ 0 & 0 & 1 & 0.11689171 \end{pmatrix}$$

Así que la solución por mínimos cuadrados es:

$$\widehat{X} = \begin{pmatrix} 0.36936168 \\ 1.31037985 \\ 0.11689171 \end{pmatrix} \tag{34}$$

8.5. Aproximación por una Recta.

Definición 8.5.1. *Consideremos una colección finita de puntos del plano; digamos*

$$¶ \;=\; \{(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n)\} \tag{35}$$

tal que $a_i \neq a_j$ para algún i y para algún j, $(1 \leq i \leq n)$ y $(1 \leq j \leq n)$ entonces la recta "que mejor se ajuste "a la colección de puntos (35), la llamaremos "recta de mínimos cuadrados ".

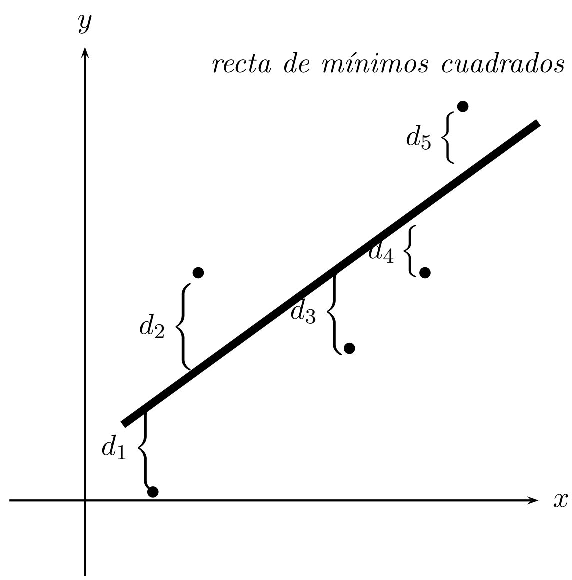


Figura 12: Recta de los Mínimos Cuadrados

Aplicación 8.5.2. *Si suponemos que la ecuación de la recta de mínimos cuadrados es dada por al ecuación:*

$$(RMC) \quad : \qquad y = m_1x + m_0 \tag{36}$$

entonces a partir de (36), tenemos las ecuación básica (EB)

$$(EB) \quad : \qquad b_i = m_1a_i + m_0 + d_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

donde;

$$d_i \neq 0 \iff (a_i,b_i) \notin (RMC) \qquad (\text{ De acuerdo a la Figura 12})$$

Así que, tenemos el sistema de ecuaciones para la recta de mínimos cuadrados:

$$\begin{aligned} b_1 &= m_1a_1 + m_0 + d_1 \\ b_2 &= m_1a_2 + m_0 + d_2 \\ b_3 &= m_1a_3 + m_0 + d_3 \\ &\vdots \\ b_n &= m_1a_n + m_0 + d_n \end{aligned}$$

Equivalentemente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ a_3 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}}_{D} \tag{37}$$

Finalmente;

(1) *como* $a_i \neq a_j$, *para algún* i *y para algún* j *entonces* $\rho(A) = 2$ *y entonces del teorema (8.4.2), sigue que el sistema* $A \cdot X = B$ *tiene una solución única por mínimos cuadrados, dada por* $\widehat{X} = (A^tA)^{-1}A^tB$

(2) *Como* $D = B - A \cdot X$ *entonces* D, *representa la menor magnitud posible*

Ejemplo 8.5.3. *En la fabricación de un producto químico* $\mathbb{Q}$, *se detecta que la cantidad de un compuesto químico* p, *es controlada por la cantidad del producto químico* c *utilizado en el proceso. Al producir un litro de* $\mathbb{Q}$, *se detectaron las cantidades de* p *y* c, *presente y usada respectivamente, según la tabla:*

c *ocupada*	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p *existente*	4.5	5.5	5.7	6.6	7.0	7.7	8.5	8.7	9.5	9.7

(38)

Solución del problema

- *El gráfico de la tabla es de la forma:*

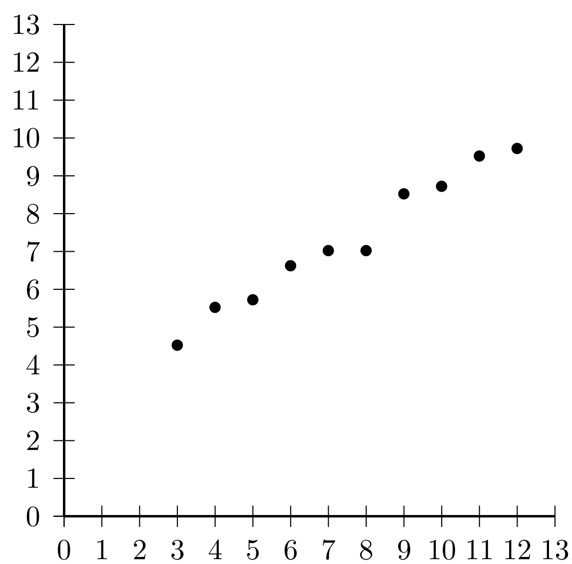


Figura 13

- *El sistema que corresponde en este caso es de la forma:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4.5 \\ 5.5 \\ 5.7 \\ 6.6 \\ 7.0 \\ 7.7 \\ 8.5 \\ 8.7 \\ 9.5 \\ 9.7 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \\ 9 & 1 \\ 10 & 1 \\ 11 & 1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix}}_{X}$$

- *Como el rango de A es 2 entonces hay solución única. Así que debemos calcular A^tA y A^tB.*

$$A^tA = \begin{pmatrix} 645 & 75 \\ 75 & 10 \end{pmatrix} \qquad A^tB = \begin{pmatrix} 598.6 \\ 73.4 \end{pmatrix}$$

- *Luego la solución del sistema es dada por:*

$$X = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.583 \\ 2.967 \end{pmatrix}$$

- *Por tanto, la recta pedida es de la forma:*

$$p = 0.583c + 2.967$$

y su gráfico es de la forma:

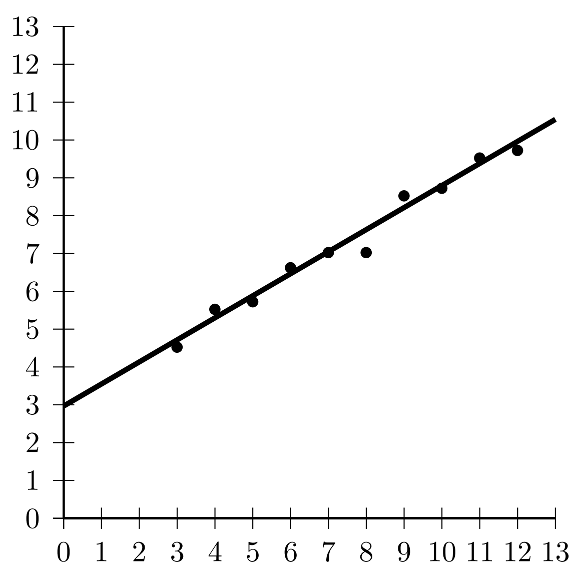


Figura 14

8.6. Aproximación por un Polinomio. Consideremos nuevamente la colección ¶ en (35), es decir

$$¶ \quad = \quad \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$$

Aplicación 8.6.1. *Si suponemos que al menos $m+1$ de los a_i son distintos entonces podemos aproximar al conjunto ¶ por un polinomio de la forma:*

$$PMC \quad : \qquad y = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i \qquad (m \leq n+1)$$

La ecuación básica en este caso es dada por:

$$b_j \quad = \quad \sum_{i=0}^{m} c_i a_j^i + d_j \qquad (1 \leq j \leq n) \tag{39}$$

y $d_j \neq 0 \Longleftrightarrow (a_j, b_j) \notin (PMC)$, para $0 \leq j \leq n$

A partir de (39), podemos construir el sistema de ecuaciones lineales para el polinomio de mínimos cuadrados:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^m \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^m \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}}_{D} \tag{40}$$

Como existen al menos $m+1$, a_i distintos entonces $\rho(A) = m+1$ y del sistema (40) y del teorema (8.4.2), sigue que el sistema asociado $A \cdot X = B$ tiene un solución única de la forma $X = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B$.

Ejemplo 8.6.2. *Ajustemos la tabla de datos*

x	0	1	2
y	1.1	0.1	-3.1

a través de4 un polinomio cuadrático $q(x) = a + bx + cx^2$

Solución

- *El gráfico de los puntos es el siguiente:*

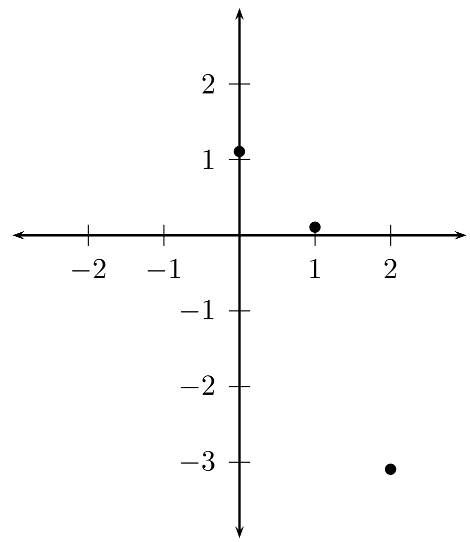


Figura 15

- *El sistema general asociado a la situación según el sistema lineal* (40) *es:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.1 \\ -3.1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{X} \tag{41}$$

- *Así que debemos resolver el sistema* $A^t \cdot A \cdot X = A^t \cdot B$, *y para ello:*
  - *Calculamos* $A^t \cdot A$ *y* $A^t \cdot B$

$$\begin{aligned} A^t \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^t \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.1 \\ -3.1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1.9 \\ -6.1 \\ -12.3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

◦ *Escalonamos la matriz ampliada* $[A^t \cdot A|A^t \cdot B]$.

$$
\begin{aligned}
[A^t \cdot A|A^t \cdot B] &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & -1.9 \\ 3 & 5 & 9 & -6.1 \\ 5 & 9 & 17 & -12.3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.10001 \\ 0 & 1 & 0 & 0.09999 \\ 0 & 0 & 1 & -1.09999 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego, el polinomio de los mínimos cuadrados es:

$$q(x) = 1.10001 + 0.09999x - 1.09999x^2 \tag{42}$$

- *Finalmente, el gráfico de* (42) *es:*

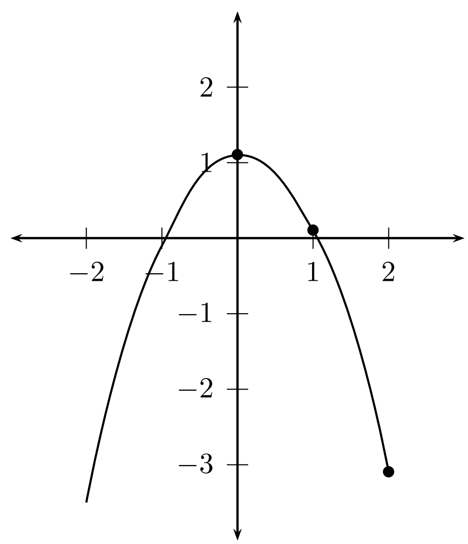


Figura 16

8.7. Aproximación por una función. Consideremos una función $y = f(x)$ continua en $\mathbb{R}$ y supongamos que conocemos sólo n valores de ella , digamos $f(x_i) = y_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq n$ entonces si queremos resolver el problema planteado al inicio de este Capitulo, debemos considerar las siguientes etapas

Etapa 1. Supongamos que existe un conjunto de funciones $\alpha = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ tal que

- α es linealmente independiente en el espacio de funciones continuas en $\mathbb{R}$
- $g_i(x_j) \in \mathbb{R}$, para $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Etapa 2. Sea $W = \langle\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}\rangle$ el espacio vectorial generado por α.

Etapa 3. Define en W el producto interno:

$$\langle h, s\rangle = \sum_{i=1}^{n} h(x_i)s(x_i) \tag{43}$$

Etapa 4. Partir de (43), definimos la norma usual:

$$\begin{aligned}\|h\| &= \sqrt{\langle h, h\rangle}\\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[h(x_i)]^2}\end{aligned}$$

Así que f es aproximable por $g \in W$ si y sólo si la distancia $d(f, g)$, es mínima, esto es equivalente a decir que $(f - g) \in W^{\perp}$.

En particular deben verificarse simultáneamente las ecuaciones:

$$\langle g_i, f - g\rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{44}$$

Es decir, que si $g = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$ entonces de (44), sigue que,

$$0 = \langle g_i, f - g\rangle = \langle g_i, f - \sum_{j=1}^{n} c_j g_j\rangle = \langle g_i, f\rangle - \langle g_i, \sum_{j=1}^{n} c_j g_j\rangle = \langle g_i, f\rangle - \sum_{j=1}^{n} c_j\langle g_i, g_j\rangle$$

Etapa 5. Resumiendo

$$\begin{aligned} g \approx f &\iff \langle g_i, f\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j\langle g_i, g_j\rangle \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\\ &\iff \sum_{j=1}^{n} g_i(x_j)f(x_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=1}^{n} g_i(x_k)g_j(x_k) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{45}$$

(45) se conoce como "método de los mínimos cuadrados"

Ejemplo 8.7.1. *Supongamos que $y = f(x)$ es una función tal que verifica los valores:*

x	*0*	*1*	*2*
$f(x)$	*1.1*	*0.1*	*-3.1*

y que deseamos aproximar según el método de los mínimos cuadrados por la función $g(x) = c_1 + c_2x^2$ entonces

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 1\\ g_2(x) &= x^2 \end{aligned}$$

Así que (45) *para este caso, consiste en:*

$$\langle g_1, f\rangle = c_1\langle g_1, g_1\rangle + c_2\langle g_1, g_2\rangle \tag{46}$$

$$\langle g_2, f\rangle = c_1\langle g_2, g_1\rangle + c_2\langle g_2, g_2\rangle \tag{47}$$

Como conocemos los valores de f y g_i, para $i = 1, 2$ entonces

$$
\begin{aligned}
\langle g_1, f\rangle &= 1\cdot 1.1 + 1\cdot 0.1 + 1\cdot(-3.1) = -1.9\\
\langle g_1, g_1\rangle &= 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3\\
\langle g_1, g_2\rangle &= 1\cdot 0^1 + 1\cdot 1^2 + 1\cdot 2^2 = 5\\
\langle g_2, g1\rangle &= 0^2\cdot 1 + 1^2\cdot 1 + 2^2\cdot 1 = 5\\
\langle g_2, g_2\rangle &= 0^2\cdot 0^2 + 1^2\cdot 1^2 + 2^2\cdot 2^2 = 17\\
\langle g_2, f\rangle &= 0^2\cdot 1.1 + 1^2\cdot 0.1 + 2^2\cdot(-3.1) = -12.3
\end{aligned}
$$

Así que sustituyendo en (46) y (47) tenemos el sistema:

$$
\left.\begin{array}{rcrcr}
3c_1 & + & 5c_2 & = & -1.9\\
5c_1 & + & 17c_2 & = & -12.3
\end{array}\right| \tag{48}
$$

De donde $c_1 \approx 1.12$ y $c_2 \approx -1.05$ así que la función que mejor aproxima a la función f, según este método es $g(x) = 1.12 - 1.05x^2$ y el gráfico de la función g es aproximadamente:

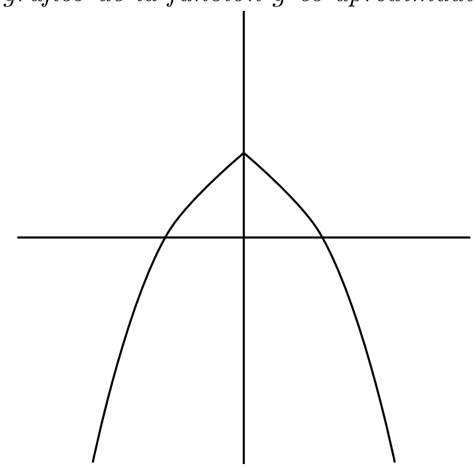


Figura 17

Ejemplo 8.7.2. *Supongamos que la población de una cierta localidad ha variado en el tiempo, según la tabla:*

	$t=4$	$t=5$	$t=6$	$t=7$
año	1950	1960	170	1980
$\underbrace{\textit{población}}_{f(t)} \times 10^4$	1.0	1.5	1.8	2.0

(49)

Supongamos que queremos aproximar los puntos de la tabla por una función del tipo:

$$
g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2
$$

entonces ¿ cúal será la población en el 2000 ?
Según el método de los mínimos cuadrados debemos tener para este caso:

- $g_1(t) = 1$
- $g_2(t) = t$
- $g_3(t) = t^2$

Así que:

$$
\begin{aligned}
\langle g_1, f)\rangle &= a_0\langle g_1, g_1)\rangle + a_1\langle g_1, g_2)\rangle + a_2\langle g_1, g_3)\rangle = 6.3\\
\langle g_2, f)\rangle &= a_0\langle g_2, g_1)\rangle + a_1\langle g_2, g_2)\rangle + a_2\langle g_2, g_3)\rangle = 36.3\\
\langle g_3, f)\rangle &= a_0\langle g_3, g_1)\rangle + a_1\langle g_3, g_2)\rangle + a_2\langle g_3, g_3)\rangle = 216.3
\end{aligned}
$$

Luego resolviendo el sistema para estos valores tenemos que:

- $a_0 = -2.415$
- $a_1 = 1.155$
- $a_2 = -0.075$

Por tanto la función que aproxima es de la forma:

$$g(t) = -2.415 + 1.155t - 0.075t^2 \tag{50}$$

Así que la población esperada según esta aproximación es dada por:

$$
\begin{aligned}
g(9)\times 10^4 &= 1.905\times 10^4\\
&= 19050
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Ejemplo 8.7.3. *En (8.7.2) tratemos de predecir la población, usando para aproximar una función del tipo* $g(t) = a\cdot e^{bt}$*. Para aplicar el método de los mínimos cuadrados podemos hacer lo siguiente:*

$$
\begin{aligned}
f(t)\approx a\cdot e^{bt} &\iff \ln f(t)\approx \ln a\cdot e^{bt}\\
&\iff \ln f(t)\approx \ln a + \ln e^{bt}\\
&\iff \ln f(t)\approx \ln a + bt\ln e\\
&\iff \ln f(t)\approx \ln a + bt
\end{aligned}
$$

Así que en este caso tenemos que:

$$g(t) = \ln a + bt$$

Es claro que también tenemos que modificar la tabla anterior, es decir (49) *se transforma aplicando* ln *en:*

	$t=4$	$t=5$	$t=6$	$t=7$
año	1950	1960	170	1980
$\underbrace{\textit{población}}_{\ln f(t)} \times 10^4$	0.0	0.405	0.588	0.693

(52)

Finalmente si llamamos:

- $F(t) = \ln f(t)$
- $c_1 = \ln a$ *y* $g_1(t) = 1$
- $c_2 = b$ *y* $g_2(t) = t$

entonces según la tabla (52) *tenemos que:*

$$\begin{aligned}
\langle g_1, F\rangle &= 1.686\\
\langle g_2, F\rangle &= 10.404\\
\langle g_1, g_1\rangle &= 4\\
\langle g_1, g_2\rangle &= 22\\
\langle g_2, g_1\rangle &= 22\\
\langle g_2, g_2\rangle &= 126
\end{aligned}$$

Así que obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 4c_1 & + & 22c_2 & = & 1.686\\ 22c_1 & + & 126c_2 & = & 10.404 \end{array}\right| \tag{53}$$

Resolviendo el sistema (53) *tenemos que:*

$$c_1 \approx 0.226 \quad\Longrightarrow\quad a = 0.439$$

$$c_2 \approx 0.226 \quad\Longrightarrow\quad b = 0.226$$

Luego de estos resultados concluimos que:

(1) $g(t) = 0.439e^{0.226t} \Longrightarrow g(9) = 3.356$

(2) *Así que finalmente tenemos en este caso:*

$$\textit{población } \times 10^4 = F(9)\times 10^4 \approx 3.356\times 10^4 = 33560 \textit{ personas} \tag{54}$$

9. Aplicación 2: Producto Interno y Estadística

Definición 9.1. *Si consideramos un fenómeno o suceso F tal que posee las posibilidades distintas de ocurrir $s_1, s_2, \dots, s_n$ entonces*

(1) *Llamaremos espacio muestral al conjunto*

$$S(F) \;=\; \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \tag{55}$$

(2) *Si cada s_i posee una probabilidad de ocurrencia p_i, para $i = 1, 2, \dots, n$ entonces llamamos "***vector de probabilidad***"del suceso F a*

$$p(F) \;=\; (p_1, p_2, \dots, p_n) \tag{56}$$

y (56)

(3) *Si además a cada elemento s_i asociamos un valor "x_i", para cada $i = 1, 2, \dots, n$ entonces el vector*

$$x(F) \;=\; (x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{57}$$

*se llama "***variable aleatoria***", asociada al espacio muestral del suceso F.*

(4) *Llamaremos "valor medio o esperado"de $x(F)$ a:*

$$\bar{x}(F) \;=\; p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \dots + p_nx_n \tag{58}$$

(5) *Llamaremos "varianza" de $x(F)$ a:*

$$v[x(F)] \quad = \quad p_1(x_1-\bar{x}(F))^2+p_2(x_2-\bar{x}(F))^2+\cdots+p_n(x_n-\bar{x}(F))^2 \tag{59}$$

(6) *Llamaremos "desviación standar" de $x(F)$ a:*

$$d[x(F)] \quad = \quad \sqrt{v[x(F)]} \tag{60}$$

Ejemplo 9.1.1. *Si F representa "el lanzamiento de un peso chileno", entonces*

(1) $S(F)=\{$*cara,sello*$\}$

(2) $p(F)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Ejemplo 9.1.2. *Si F representa "el lanzamiento de dos monedas", entonces*

(1) $S(F)=\{$*(cara,cara),(sello,sello),(cara,sello)*$\}$

(2) $p(F)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

Ejemplo 9.1.3. *Si dos personas A y B en* (9.1.1), *deciden hacer la apuesta:*

- *Si después del lanzamiento de la moneda sale cara A gana \$10*
- *Si después del lanzamiento de la moneda sale sello B gana \$10*

entonces

(1) $S(F)=\{$*cara,sello*$\}$

(2) $p(F)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

(3) $x(F,A)=(10,-10)$, *variable aleatoria del punto de vista de A*

(4) $x(F,A)=(-10,10)$, *variable aleatoria del punto de vista de B*

Ejemplo 9.1.4. *Si las mismas personas A y B deciden hacer la apuesta en* (9.1.2), *como sigue:*

- *Si salen dos caras A gana \$10*
- *Si salen dos sellos A gana \$7*
- *Si salen una cara y un sello B gana \$7*

entonces la situación es la siguiente:

(1) $S(F)=\{$*(cara,cara),(sello,sello),(cara,sello)*$\}$

(2) $p(F)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

(3) $x(F,A) = (10, 7, -7)$

(4) $x(F,B) = (-10, -7, 7)$

9.2. Un producto interno "estadístico". Sea $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo entonces define el producto interno:

$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle_u = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot x_i \cdot y_i \tag{61}$$

Lema 9.2.1. *Si F es un evento entonces*

(1) $\bar{x}(F) = \langle x(F), (1, 1, \ldots, 1) \rangle_{p(F)}$

(2) $v[x(F)] = \langle x(F) - \bar{x}(F)(1, 1, \ldots, 1), x(F) - \bar{x}(F)(1, 1, \ldots, 1) \rangle_{p(F)}$

(3) $d[x(F)] = \| x(F) - \bar{x}(F)(1, 1, \ldots, 1) \|$

En efecto

Para probar [1] hacemos:

$$\begin{aligned} \langle x(F), (1, 1, \ldots, 1) \rangle_{p(F)} &= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \cdot 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \\ &= \bar{x}(F) \qquad \textit{verificar en } (58) \end{aligned}$$

Para probar [2] hacemos:

$$\langle x(F) - \bar{x}(F)(1, 1, \ldots, 1), x(F) - \bar{x}(F)(1, 1, \ldots, 1) \rangle_{p(F)} = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \bar{x}(F))^2 \ (\textit{verificar en } 59)$$

Para probar [3] hacemos:

$$\begin{aligned} \| x(F) - \bar{x}(F)(1, 1, \ldots, 1) \| &= \| (x_1 - \bar{x}(F), x_2 - \bar{x}(F) \ldots, x_n - \bar{x}(F)) \| \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \bar{x}(F))^2} \\ &= \sqrt{v[x(F)]} \quad \textit{verificar en } (60) \end{aligned}$$

Ejemplo 9.2.2. *Para el suceso relatado en 9.1.1, tenemos la información:*

- $s(F) = \{$ *cara, sello*$\}$
- $p(F) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right)$
- $x(F,A) = (10, -10)$, *variable aleatoria del punto de vista de A*

- $x(F, A) = (-10, 10)$, *variable aleatoria del punto de vista de B*

Luego,

$$\begin{aligned}
\bar{x}(F, A) &= \langle (10, -10), (1, 1) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{x}(F, B) &= \langle (-10, 10), (1, 1) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d[x(F, A)] &= \|(10, -10)\| \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}10^2 + \frac{1}{2}(-10)^2} \\
&= 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d[x(F, B)] &= \|(-10, 10)\| \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}(-10)^2 + \frac{1}{2}10^2} \\
&= 10
\end{aligned}$$

9.3. Correlación. Sea F un evento n-dimensional, es decir:

- $s(F) = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ es su espacio muestral.
- $p(F) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ es su vector probablidad.

Si suponemos que es posible asociar a dos comportamientos de F, dos variables aleatorias, digamos $x(F, A) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $x(F, B) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ entonces estudiemos las posibles relaciones entre $x(F, A)$ y $x(F, B)$.

(1) Tenemos en primer lugar un valor esperado para cada caso:

- $\bar{x}(F, A) = \sum_{i=1} np_i x_i$
- $\bar{x}(F, B) = \sum_{i=1} np_i y_i$

(2) Podemos construir los vectores asociados:

$$\begin{aligned}
x(F, A) - \bar{x}(F, A)(1, 1, \dots, 1) &= (x_1 - \bar{x}(F, A), x_2 - \bar{x}(F, A), \dots, x_n - \bar{x}(F, A)) \\
x(F, B) - \bar{x}(F, B)(1, 1, \dots, 1) &= (y_1 - \bar{x}(F, B), y_2 - \bar{x}(F, B), \dots, y_n - \bar{x}(F, B))
\end{aligned}$$

(3) El conjunto

$$C = \{(x_1 - \bar{x}(F, A), \dots, x_n - \bar{x}(F, A)), (y_1 - \bar{x}(F, B), \dots, y_n - \bar{x}(F, B))\} \tag{62}$$

es linealmente independiente o linealmente dependiente , así que tenemos dos casos:

- Caso 1. C es Linealmente dependiente. Luego existe, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que:

$$x(F,B) = \lambda x(F,A)$$

Es decir, $x(F,A)$ y $x(F,B)$ están relacionados o uno es dependiente. Ahora

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\langle x(F,A), x(F,B)\rangle}{\|x(F,A)\|\|x(F,B)\|} = \frac{\langle x(F,A), \lambda x(F,A)\rangle}{\|x(F,A)\|\|\lambda x(F,A)\|} = \frac{\lambda\langle x(F,A), x(F,A)\rangle}{|\lambda|\|x(F,A)\|\|x(F,A)\|} \\
&= \frac{\lambda\|x(F,A)\|^2}{|\lambda|\|x(F,A)\|\|x(F,A)\|} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \begin{cases} 1: & \text{si } \lambda > 0 \\ -1: & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\theta = \begin{cases} 0 \\ \text{ó} \\ \pi \end{cases} \tag{63}$$

- Caso 2. C es Linealmente independiente. Luego no existe relación entre $x(F,A)$ y $x(F,B)$

Definición 9.3.1. *Llamaremos "**coeficiente de correlación**" de $x(F,A)$ y $x(F,B)$ a*

$$r(x(F,A), x(F,B)) = \frac{\langle x(F,A), x(F,B)\rangle}{\|x(F,A)\|\|x(F,B)\|} \tag{64}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
r(x(F,A), x(F,B)) &= \frac{\langle x(F,A), x(F,B)\rangle}{\|x(F,A)\|\|x(F,B)\|} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \bar{x}(F,A))(y_i - \bar{x}(F,B))}{\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \bar{x}(F,A))^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i(y_i - \bar{x}(F,B))^2\right]^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.3.2. *Consideremos un grupo de 10 atletas de los cuales conocemos sus registros de 1 a 10 en dos pruebas; prueba1 y prueba2, según la tabla:*

atleta		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
registro	*prueba 1*	2	8	5	7	7	5	3	1	9	9
	prueba 2	1	9	7	2	7	4	6	3	9	7

Figura 18

Estudiemos la correlación entre el rendimiento de los atletas en ambas pruebas:

(1) *El espacio muestral será:*

$$s(F) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \tag{65}$$

(2) *El vector probabilidad es:*

$$p(F) = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{10}\right) \tag{66}$$

(3) *Si notamos prueba* $i = p_i$, *para* $i = 1, 2$ *entonces*

$$x(F, p_1) = (2,8,5,7,7,5,3,1,9,9) \tag{67}$$

$$x(F, p_2) = (1,9,7,2,7,4,6,3,9,7) \tag{68}$$

Ahora, comenzamos a calcular:

- *De* (66) *y* (67), *tenemos que*

$$\begin{aligned} \bar{x}(F, p_1) &= \frac{1}{10} \cdot 56 \\ &= 5.6 \end{aligned} \tag{69}$$

- *De* (66) *y* (68), *tenemos que*

$$\begin{aligned} \bar{x}(F, p_2) &= \frac{1}{10} \cdot 55 \\ &= 5.5 \end{aligned} \tag{70}$$

- *De* (67) *y* (70), *tenemos que*

$$x(F, p_1) - \bar{x}(F, p_1)(1, 1, \dots, 1) = (-3.6, 2.4, -0.6, \dots, 3.4) \tag{71}$$

- *De* (68) *y* (70), *tenemos que*

$$x(F, p_2) - \bar{x}(F, p_2)(1, 1, \dots, 1) = (-4.5, 3.5, 1.5, \dots, 1.5) \tag{72}$$

- *Además, de* (71) *y* (72) *tenemos que*

$$\langle x(F,p_1)-\bar{x}(F,p_1)(1,1,\dots,1), x(F,p_2)-\bar{x}(F,p_2)(1,1,\dots,1)\rangle \approx 4.9 \tag{73}$$

$$\|x(F,p_1)-\bar{x}(F,p_1)(1,1,\dots,1)\| \approx 7.4 \tag{74}$$

$$\|x(F,p_2)-\bar{x}(F,p_2)(1,1,\dots,1)\| \approx 7.2 \tag{75}$$

- *Finalmente de* (73), (74), (75), *obtenemos que:*

$$r(x(F,p_1),x(F,p_2)) \approx 0.67 \tag{76}$$

10. Aplicación 3: Series de Fourier y Producto Interno

10.1. Conectando lugares inaccesibles. Supongamos que necesitamos conectar dos lugares inaccesibles, como lo muestra la función.

$$f_1(x)=\begin{cases} -1 & : \text{si } -\pi < x < 0 \\ \\ 1 & : \text{si } \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Cuyo gráfico es de la forma:

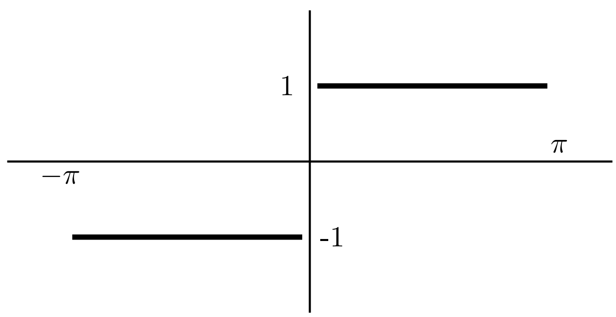
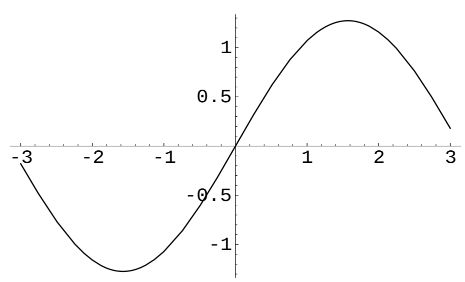


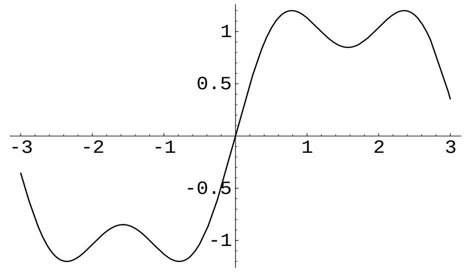
Figura 19 $\quad y=f_1(x)$

La idea es usar como soporte, ideas trigonométricas. para conectar esos lugares inaccesibles:

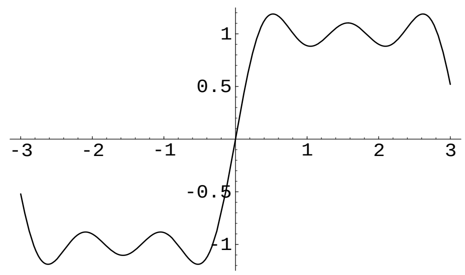
(1) Partamos graficando la función $y=\dfrac{4}{\pi}$ sen x para $(-\pi < x < \pi)$



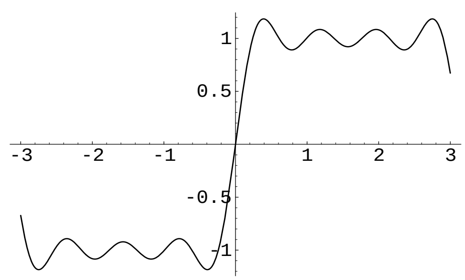
(2) Graficamos la función $y = \dfrac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \dfrac{\text{sen } 3x}{3}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



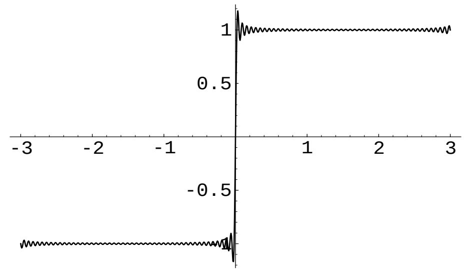
(3) Graficamos la función $y = \dfrac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \dfrac{\text{sen } 3x}{3} + \dfrac{\text{sen } 5x}{5}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



(4) Graficamos la función $y = \dfrac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \dfrac{\text{sen } 3x}{3} + \dfrac{\text{sen } 5x}{5} + \dfrac{\text{sen } 7x}{7}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



(5) En fin, graficamos, la función $y = \dfrac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \dfrac{\text{sen } 3x}{3} + \dfrac{\text{sen } 5x}{5} + \dfrac{\text{sen } 7x}{7} + \cdots + \dfrac{\text{sen } 99x}{99}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



Conclusión 10.1.1. *Si llamamos* $g_s = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{s}\frac{\operatorname{sen}(2i-1)x}{2i-1}$, *para* $(s \in \mathbb{N})$ *entonces podemos observar lo siguiente:*

(1) *A medida que* s *crece en* $\mathbb{N}$, *el gráfico de* g_s, *más se parece o mejor copia, a la función* f_1

(2) *Sin embargo, debemos tener cuidado con la comparación de las expresiones analíticas de las funciones involucradas; porque por ejemplo:*

   (a) $f_1(0) \notin \mathbb{R}$ *y* $g_s(0) = 0$

   (b) $f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ *y* $g_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}$

   Sin embargo, observen lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
g_s\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{s}\frac{\operatorname{sen}(2i-1)\frac{\pi}{2}}{2i-1} \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} \\
&= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{2s-1}\right)
\end{aligned}
$$

   Así por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
g_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi} = 1.273 \\
g_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right) = 0.848 \\
g_3\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = 1.013 \\
g_4\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) = 0.921 \\
g_5\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right) = 1.063 \\
g_6\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right) = 0.947
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\lim_{s\to\infty} g_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{s\to\infty}\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} = 1 \Longrightarrow \frac{\pi}{4} = \lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}$$

(3) *Será necesario entonces ser cuidadoso al referirnos al término aproximación de dos funciones, ya sea en su gráfico o en sus valores, con estos cuidados podemos escribir*

$$f_1(x) \approx \lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{s}\frac{\operatorname{sen}(2i-1)x}{2i-1} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2i-1)x}{2i-1} \quad (-\pi < x < \pi)$$

10.2. Copiando una función continua. Consideremos ahora una función continua, $f_2(x) = |x|$, para $(-\pi < x < \pi)$, cuyo gráfico es de la forma

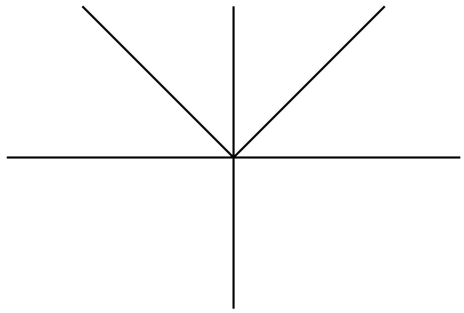
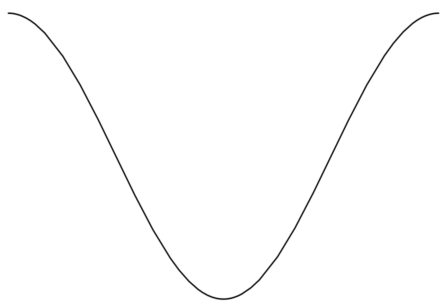


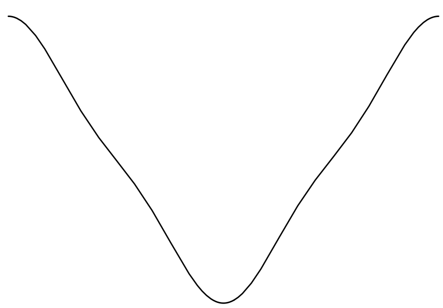
Figura 20 $\quad y = f_2(x)$

Al igual que en el caso anterior, podemos aproximar el gráfico de la función por otras funciones:

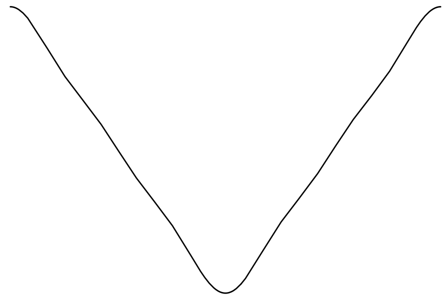
(1) Para $y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\cos x$



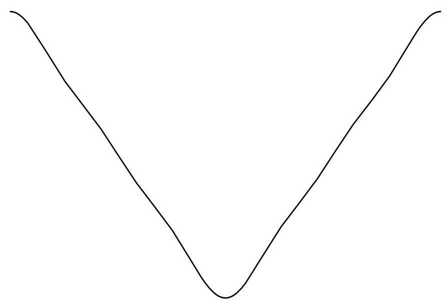
(2) $y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left[\cos x + \dfrac{cos\ 3x}{4}\right]$



(3) $y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left[\cos x + \dfrac{cos\ 3x}{4} + \dfrac{cos\ 5x}{9}\right]$



(4) $y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{cos\ 3x}{4} + \frac{cos\ 5x}{9} + \cdots \frac{cos\ 99x}{50^2}\right]$



Conclusión 10.2.1. *Aquí tenemos también que*

$$|x| \quad \approx \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\lim_{s\to\infty}\sum_{k=1}^{s}\frac{\cos(2k-1)x}{k^2} \qquad (-\pi < x < \pi)$$

10.3. Formalización inicial y Análisis de la situación.

Definición 10.3.1. *Si notamos* $C[-\pi,\pi] = \{f : [-\pi,\pi] \longmapsto \mathbb{R} \mid f$ *es una función continua*$\}$ *al* $\mathbb{R}$ *espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo* $[-\pi,\pi] \subset \mathbb{R}$ *y con valores reales entonces en* $C[-\pi,\pi]$ *definimos un producto interno como sigue*

$$\langle f, g\rangle \quad = \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\ dx$$

10.3.2. Propiedades y ejemplos de $\langle , \rangle$.

(1) Si $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ entonces $\langle \cos nx, \cos mx\rangle = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$

En efecto

Como, $\langle \cos nx, \cos mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\ dx$ entonces para resolver esta integral podemos aplicar las siguientes propiedades:

(a) De la paridad de la función coseno sigue que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\ dx \quad = \quad 2\int_{0}^{\pi} \cos mx \cos nx\ dx$$

(b) De las identidades que involucran a la función coseno

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

Deducimos que

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

Y entonces para $n\neq m$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx &= 2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\cos((m+n)x)+\cos((m-n)x)\,dx\\ &= \int_0^{\pi}(\cos((m+n)x)+\cos((m-n)x)\,dx\\ &= \left(\frac{1}{m+n}\operatorname{sen}((m+n)x)+\frac{1}{m-n}\operatorname{sen}((m-n)x)\right)\Bigg|_0^{\pi}\\ &= \left(\frac{1}{m+n}\operatorname{sen}((m+n)\pi)+\frac{1}{m-n}\operatorname{sen}((m-n)\pi)\right)-\\ &\quad\left(\frac{1}{m+n}\operatorname{sen}((m+n)0)+\frac{1}{m-n}\operatorname{sen}((m-n)0)\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Ahora, para $n=m$

$$\begin{aligned}\langle\cos nx,\cos nx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = 2\int_0^{\pi}\cos^2 nx\,dx = 2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx\\ &= \int_0^{\pi}(1+\cos 2nx)\,dx = \left(x+\frac{1}{2n}\operatorname{sen} nx\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi\end{aligned}$$

(2) Si $n\in\mathbb{N}$ y $m\in\mathbb{N}$ entonces $\langle\operatorname{sen} nx,\operatorname{sen} mx\rangle = \begin{cases}\pi & \text{si } n=m\\ 0 & \text{si } n\neq m\end{cases}$

En efecto

Como, $\langle\operatorname{sen} nx,\operatorname{sen} mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} mx\operatorname{sen} nx\,dx$ entonces para resolver esta integral podemos aplicar las siguientes propiedades:

(a) De la imparidad de la función seno sigue que $\operatorname{sen} mx\operatorname{sen} nx$ es una función par, así que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} mx\operatorname{sen} nx\,dx = 2\int_0^{\pi}\operatorname{sen} mx\operatorname{sen} nx\,dx$$

(b) De las identidades que involucran a la función coseno

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

Deducimos que

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

Y entonces para $n\neq m$ tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}mx\operatorname{sen}nx\;dx \;=\; 2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\cos((m-n)x)-\cos((m+n)x)\;dx=0$$

Ahora para $n=m$

$$\begin{aligned}\langle\operatorname{sen}nx,\operatorname{sen}nx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2 nx\;dx=\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 nx\;dx=2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}\;dx\\ &= \int_0^{\pi}(1-\cos 2nx)\;dx=\pi\end{aligned}$$

(3) Si $n\in\mathbb{N}$ y $m\in\mathbb{N}$ entonces $\langle\operatorname{sen}mx,\cos nx\rangle=0$ para $(n\in\mathbb{N})$ y $(m\in\mathbb{N})$

En efecto
De la imparidad de la función seno y de la paridad de la función coseno sigue que $\operatorname{sen}mx\cos nx$ es una función impar, así que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}mx\cos nx\;dx \;=\; 0$$

(4) Si $n\in\mathbb{N}$ entonces

- $\langle 1,1\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi$
- $\langle 1,\operatorname{sen}nx\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}nx\;dx=0$
- $\langle 1,\cos nx\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\;dx=0$

Teorema 10.3.3. *El conjunto* $Trigonom_n[x]=\{1,\cos x,\cos 2x.\dots,\cos nx\}\cup\{\operatorname{sen}x,\operatorname{sen}2x.\dots,\operatorname{sen}nx\}$ *es linealmente independiente* $(\forall n; n\in\mathbb{N})$*, y una base para el subespacio generado por* $Trigonom_n[x]$*, se decir, para* $\langle Trigonom_n[x]\rangle$*.*

En efecto

Si suponemos que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx = 0$ *entonces para* $s \geq 0$

$$\begin{aligned}
\left\langle \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx\right], \cos sx \right\rangle &= \langle 0, \cos sx\rangle \Longrightarrow \\
\int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx\right] \cos sx \; dx &= \int_{-\pi}^{\pi} 0 \; dx \Longrightarrow \\
\sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos sx \; dx + \sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \cos sx \; dx &= 0 \Longrightarrow \\
\sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos sx \; dx &= 0 \Longrightarrow \\
a_s \pi &= 0 \Longrightarrow \\
a_s &= 0
\end{aligned}$$

De forma análoga, para $s \geq 1$ *tenemos que*

$$\begin{aligned}
\left\langle \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx\right], \cos sx \right\rangle &= \langle 0, \operatorname{sen} sx\rangle \Longrightarrow \\
\int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx\right] \operatorname{sen} sx \; dx &= \int_{-\pi}^{\pi} 0 \; dx \Longrightarrow \\
\sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \operatorname{sen} sx \; dx + \sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} sx \; dx &= 0 \Longrightarrow \\
\sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} sx \; dx &= 0 \Longrightarrow \\
b_s \pi &= 0 \Longrightarrow \\
b_s &= 0
\end{aligned}$$

Observación 10.3.4. *Supongamos que* $f \in \langle Trigonom_n[x]\rangle$ *entonces*

$$f(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

aplicando, primeramente $\cos sx$*, obtenemos,*

$$
\begin{aligned}
\langle f(x), \cos sx\rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx, \cos sx \right\rangle \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos sx \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx \; dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos sx \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx \; dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} a_k cos\, sx \cos kx \, dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-\pi}^{\pi} cos\, sx \cos kx \, dx \\
&= a_s \int_{-\pi}^{\pi} cos\, sx \cos sx \, dx \\
&= a_s \pi \qquad\quad (s \geq 1)
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
a_s = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos sx \; dx \quad (s \geq 1)
$$

Y para $s = 0$

$$
\langle f(x), 1\rangle = a_0 \; 2\pi \Longrightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \; dx
$$

Análogamente, aplicando $\operatorname{sen} sx$*, obtenemos para los coeficientes* b_s

$$
b_s = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} sx \; dx
$$

Definición 10.3.5. *Si* $f \in \langle Trigonom_n[x]\rangle \leq C[-\pi, \pi]$ *entonces llamaremos Serie de Fourier de* f *a:*

$$
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})
$$

Y, a_s *y* b_s*, serán llamados los coeficientes de Fourier de* f *y son obtenidos a través de las fórmulas.*

$$
\begin{aligned}
a_s &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos sx \; dx \quad (s \geq 0) \\
b_s &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} sx \; dx
\end{aligned}
$$

Ejemplo 10.3.6. *Sea* $f(x) = x$ *entonces calculemos la serie de Fourier de* $f(x) = x$ $(\forall n; n \in \mathbb{N})$, *(si es posible), es decir;*

$$
x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx
$$

Para determinar la Serie debemos calcular los coeficientes de Fourier, a_k *y* b_k*, pero antes de* *hacerlo será conveniente prestar atención a lo siguiente,*

(1) $f(-x) = -x = -f(x)$, *así que* f *es una función impar entonces* $x\cos ks$ *es una función impar,* $(\forall k; k \geq 0)$. *Por tanto*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\, dx = 0 \quad (\forall k; k \geq 0)$$

(2) *Razonando de la misma forma que encima,* $x \operatorname{sen} kx$ *es función par y entonces*

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen} kx\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Ahora integrando por partes tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} u = x & : & dv = \operatorname{sen}(kx)dx \\ du = dx & : & v = -\dfrac{1}{k}\cos(kx) \end{array}\right\} \Longrightarrow b_k = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{k}\ \cos(kx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi} cos(kx)\ dx\right]$$

Luego,

$$b_k = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{k}\cos(k\pi)\right] = \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Así que, la serie es de la forma:

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\operatorname{sen}(kx)$$

(3) *Respecto de la situación geométrica, podemos observar que:*

(a) *El gráfico de* $y = x$ *es del tipo*

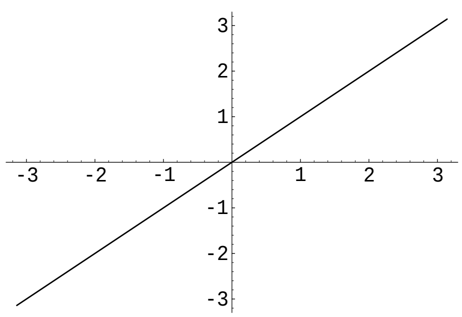


Figura 21 $y = x$

(b) *Si* $k = 1$ *entonces para la serie tenemos que su gráfico es del tipo:*

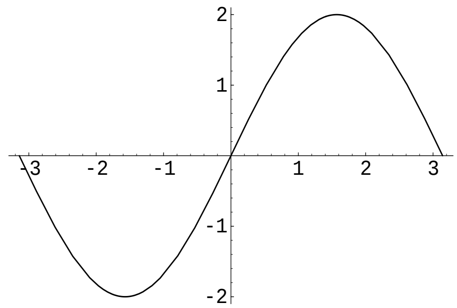


Figura 22 $\quad y = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}(kx)$

(c) *Para* $k = 2$ *tenemos*

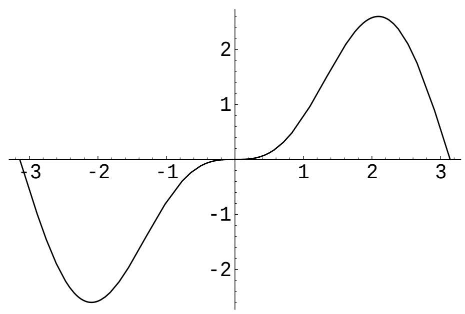


Figura 23 $\quad y = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}(kx)$

5

(d) *Para* $k = 50$ *sucede que*

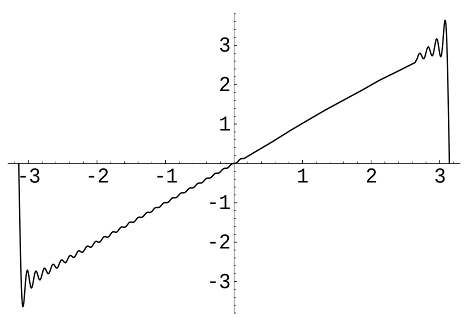


Figura 24 $\quad y = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{50} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}(kx)$

10.4. Ejercicios Propuestos. Desarrolle en Serie de Fourier en el intervalo $[-\pi,\pi]$ las siguientes funciones:

(1) $f(x)=e^x$

(2) $f(x)=\operatorname{sen} x$

(3) $f(x)=|\operatorname{sen} x|$

(4) $f(x)=\begin{cases} 0 & : \text{ si } -\pi<x\leq 0\\ x & ; \text{ si } \quad 0\leq x<\pi\end{cases}$

Además demuestre que: $\dfrac{\pi^2}{8}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$

Bibliografía

[1] Bello, I. "Álgebra Elemental ", Brooks/Cole Publishing Company 1999.

[2] Bobadilla, G. Labarca R. "Cálculo 1 ", Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago 2007.

[3] Boldrini, J. Rodriguez, S. Figueiredo, V. Wetzler, H. "Álgebra Linear", Editora Harper & Row do Brasisl Ltda, 1984.

[4] Fraleigh J. "Álgebra Abstracta "Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

[5] Grimaldi, R. "Matemáticas Discretas y Combinatorias ", Addison Wesley 1997.

[6] Gustafson, R. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[7] Kaufmann, J. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 2000

[8] Santander, R. "Álgebra Elemental y superior", Universidad de Santiago 2004

[9] Santander, R. "Álgebra Lineal", Universidad de Santiago 2004

[10] Santander, R. "Un Segundo curso de Algebra Lineal"

[11] Swokowski, E. "Álgebra y trigonometría ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[12] Zill, D. " Álgebra y trigonometría ", Mc Graw Hill 1999

Indice Alfabético