Contenidos

CAPITULO 2

Espacios Vectoriales

El trabajo solidario es lo único que hace humano al ser humano

Este capitulo esta destinado a buscar una representación natural y eficiente de la información, a través de "relaciones teóricas, lease combinaciones lineales" e "implementaciones prácticas, lease representación matricial y resolución de ecuaciones." Para ello será necesario: Construir un ambiente suficientemente amplio, donde se puedan modelar situaciones prácticas, desarrollar técnicas que permitan controlar rápida y eficientemente una gran cantidad de información y mostrar la equivalencia entre el ambiente teórico y práctico.

1. Definición de Espacios Vectorial

Demos una mirada a nuestra evolución al momento de manipular la información.

(1) Ya observamos que para cada ($n \in \mathbb{N}$), existen únicos números naturales $a_0, a_1, a_2, \dots, a_s$ tales que

$$n = a_s 10^s + a_{s-1}10^{s-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0; \quad (0 \leq j \leq s);\ (0 \leq a_j \leq 9)$$

Y estos números son los que identifican unívocamente al número n.

(2) Basándonos en esta idea definimos informalmente a los polinomios, es decir

$$p(x) \in \mathbb{R}[x] \quad \Longleftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_s x^s$$

Y en este caso son los coeficientes los que diferencian a un polinomio de otro.

(3) Si consideramos $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ entonces sabemos que $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo abeliano y que

(a) $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$

(b) Y si además permitimos una ponderación externa que generalice el hecho

$$\left.\begin{array}{rcl} (x,y)+(x,y) & = & 2(x,y) \\ & \wedge & \\ (x,y)+(x,y) & = & (2x,2y) \end{array}\right\} \Longrightarrow 2(x,y) = (2x,2y)$$

entonces obtenemos que

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

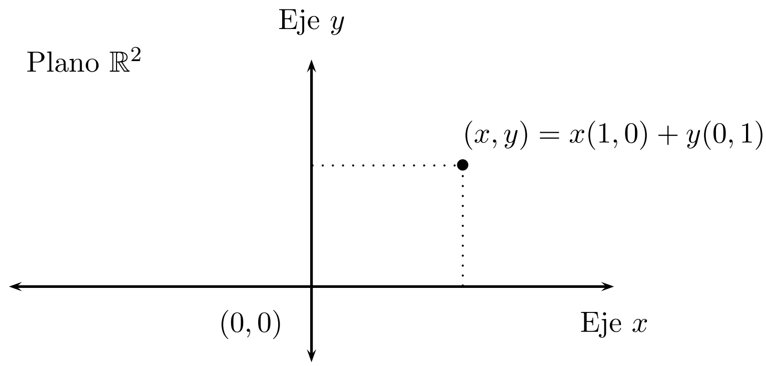


Figura 1 : Plano Cartesiano

(4) Otro caso que podemos representar con las licencias que da la heurística es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) Intentando generalizar aún más el formato de nuestros números. Supongamos que necesitamos conectar dos lugares inaccesibles, como lo muestra la función.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : \text{si } -\pi < x < 0 \\ \\ 1 & : \text{si } \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Cuyo gráfico es de la forma:

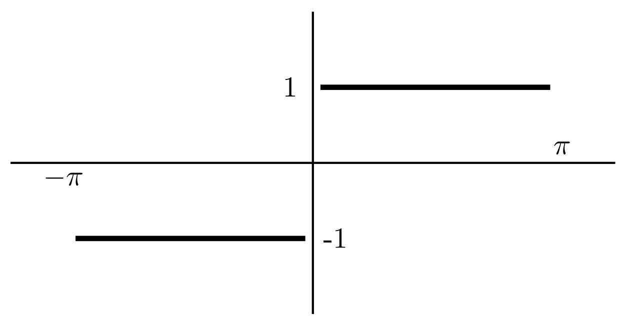
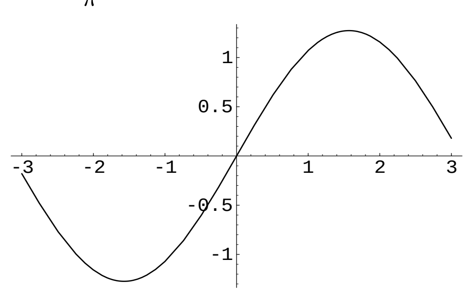


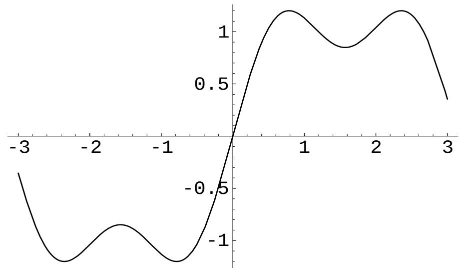
Figura 2 $\quad y = f(x)$

La idea es usar como soporte, ideas trigonométricas. para conectar esos lugares inaccesibles:

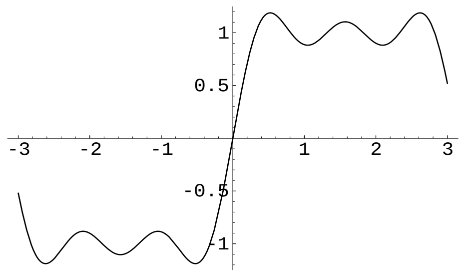
(a) Partamos graficando la función $y = \dfrac{4}{\pi}$ sen x para $(-\pi < x < \pi)$



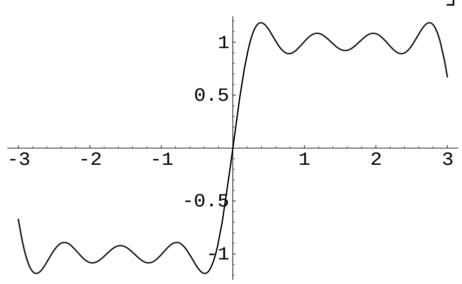
(b) Graficamos la función $y = \dfrac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \dfrac{\text{sen } 3x}{3}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



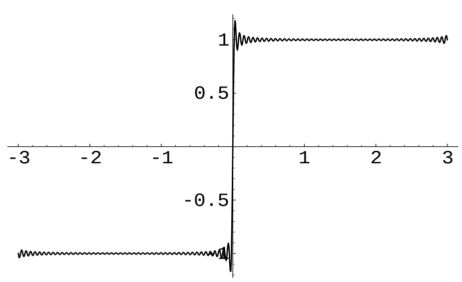
(c) Graficamos la función $y = \dfrac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \dfrac{\text{sen } 3x}{3} + \dfrac{\text{sen } 5x}{5}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



(d) Graficamos la función $y = \dfrac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \dfrac{\text{sen } 3x}{3} + \dfrac{\text{sen } 5x}{5} + \dfrac{\text{sen } 7x}{7}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



(e) En fin, graficamos, la función $y = \dfrac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \dfrac{\text{sen } 3x}{3} + \dfrac{\text{sen } 5x}{5} + \dfrac{\text{sen } 7x}{7} + \cdots + \dfrac{\text{sen } 99x}{99}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



(f) Si llamamos $g_s = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{s} \dfrac{\text{sen } (2i-1)x}{2i-1}$, para $(s \in \mathbb{N})$ entonces podemos observar lo siguiente:

(i) A medida que s crece en $\mathbb{N}$, el gráfico de g_s, más se parece (copia), a la función f

(ii) Sin embargo, debemos tener cuidado con la comparación de las expresiones analíticas de las funciones involucradas; porque por ejemplo,

- $f(0) \notin \mathbb{R}$ y $g_s(0) = 0$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y $g_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}$

Sin embrago, observen lo siguiente:

$$\begin{aligned} g_s\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{s}\frac{\operatorname{sen}(2i-1)\frac{\pi}{2}}{2i-1} \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} \\ &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{2s-1}\right) \end{aligned}$$

Así por ejemplo,

$$\begin{aligned} g_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi} = 1.273 \\ g_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right) = 0.848 \\ g_3\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = 1.013 \\ g_4\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) = 0.921 \\ g_5\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right) = 1.063 \\ g_6\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right) = 0.947 \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{s\to\infty} g_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{s\to\infty}\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} = 1$$

(iii) Será necesario entonces ser cuidadoso al referirnos al término aproximación de dos funciones, ya sea en su gráfico o en sus valores, con estos cuidados podemos escribir,

$$f(x) \approx \lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{2i-1}\operatorname{sen}(2i-1)x = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i-1}\operatorname{sen}(2i-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

Bien, las ideas expuestas encima nos inducen a definir un objeto abstracto que le de sentido a casi todos los ejemplos revisados y otros que analizaremos más adelante.

Definición 1.1. *Un conjunto $\mathbb{V}$ será llamado un $\mathbb{K}$ - Espacio Vectorial si*

(1) $\mathbb{V} \neq \phi$

(2) $\mathbb{V}$ *admite una operación interna, “ + ”; definida por*

$$\begin{array}{rcccc} + & : & \mathbb{V}\times\mathbb{V} & \longmapsto & \mathbb{V} \\ & & (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array}$$

tal que $(\mathbb{V},+)$ *es un grupo abeliano, es decir satisface las propiedades:*

- $u+(v+w)=(u+v)+w \quad (\forall u; u\in\mathbb{V}); (\forall v; v\in\mathbb{V}); (\forall w; w\in\mathbb{V})$
- *Existe* $0_{\mathbb{V}}\in\mathbb{V}$ *tal que* $u+0_{\mathbb{V}}=0_{\mathbb{V}}+u=u \quad (\forall u; u\in\mathbb{V})$
- *Para cada* u, $u+(-u)=-u+u=0_{\mathbb{V}}$
- $u+v=v+u \quad (\forall u; u\in\mathbb{V}); (\forall v; v\in\mathbb{V}$

(3) $\mathbb{V}$ *admite una operación externa, "$\cdot$"; definida por*

$$\begin{array}{rcccc} \cdot & : & \mathbb{K}\times\mathbb{V} & \longmapsto & \mathbb{V} \\ & & (\lambda,v) & \longmapsto & \lambda\cdot v \end{array}$$

con $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ *y satisface las propiedades:*

- $\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v \quad (\forall\lambda; \lambda\in\mathbb{K}); (\forall u; u\in\mathbb{V}); (\forall v; v\in\mathbb{V})$
- $(\lambda+\beta)\cdot u=\lambda\cdot u+\beta\cdot u \quad (\forall\lambda; \lambda\in\mathbb{K}); (\forall\beta; \beta\in\mathbb{K}); (\forall u; u\in\mathbb{V})$
- $(\lambda\cdot\beta)\cdot u=\lambda\cdot(\beta\cdot u) \quad (\forall\lambda; \lambda\in\mathbb{K}); (\forall\beta; \beta\in\mathbb{K}); (\forall u; u\in\mathbb{V})$
- $\lambda\cdot u=0_{\mathbb{V}}\Longrightarrow\lambda=0_{\mathbb{K}}\vee u=0_{\mathbb{V}} \quad (\forall\lambda; \lambda\in\mathbb{K}); (\forall u; u\in\mathbb{V})$

Los elementos de $\mathbb{V}$ *se denominarán vectores, los elementos de* $\mathbb{K}$ *se llamarán escalares, y para designar a un espacio vectorial lo notaremos como,* $(\mathbb{V},+,\cdot,\mathbb{K})$*, donde* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

Ejemplo 1.1.1. *El espacio vectorial de las* n *- uplas* $(\mathbb{K}^n,+,\cdot,\mathbb{K})$ *para cada* $n\in\mathbb{N}$*, donde,*

$$\mathbb{K}^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{R}; 1\le i\le n\}$$

Y las operaciones interna y externa son definidas respectivamente por,

(1) $(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)+(y_1,y_2,y_3,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,\dots,x_n+y_n)$

(2) $\lambda\cdot(x_1,x_2,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n) \qquad (\lambda\in\mathbb{K})$

Ejemplo 1.1.2. *El espacio vectorial de las Matrices* $(\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times m),+,\cdot,\mathbb{K})$*;* $n\in\mathbb{N}$*;* $m\in\mathbb{N}$ *donde,*

$$\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times m)=\{A=(a_{ij})\mid a_{ij}\in\mathbb{K}\wedge(1\le i\le n)(1\le j\le m)\}$$

Y las operaciones interna y externa son definidas respectivamente por,

(1) $((a_{ij})+(b_{ij}))=(a_{ij}+b_{ij})$

(2) $\lambda(a_{ij})=(\lambda a_{ij})$

Ejemplo 1.1.3. *El espacio vectorial de los polinomios* $(\mathbb{K}[x], +, \cdot, \mathbb{K})$ *con coeficientes en el cuerpo* $\mathbb{K}$ *donde,*

$$\mathbb{K}[x] \quad = \quad \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{s} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{K}, s \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n) \right\}$$

Y las operaciones interna y externa son definidas respectivamente por,

(1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{s} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{s} (a_i + b_i) x^i$

(2) $\displaystyle\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i x^i$

Ejemplo 1.1.4. *El espacio vectorial de los Polinomios de grado menor o igual que* n *con coeficientes en* $\mathbb{K}$, $(\mathbb{K}_n[x], +, \cdot, \mathbb{K})$ *es decir;*

$$\mathbb{K}_n[x] = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \rho(p(x)) \leq n\}$$

Y las operaciones interna y externa son definidas respectivamente por,

(1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$

(2) $\displaystyle\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i x^i$

Ejemplo 1.1.5. *El espacio vectorial de las funciones Reales definidas en* $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}$, *para* $\mathbb{U} \neq \emptyset$; $(F_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$, *donde*

$$F_{\mathbb{R}}(\mathbb{U}, \mathbb{R}) \quad = \quad \{f : U \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ es una función}\}$$

Y las operaciones interna y externa son definidas respectivamente por,

(1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Ejemplo 1.1.6. *El espacio vectorial de las funciones Reales continuas definidas en* $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}$, *para* $\mathbb{U} \neq \emptyset$; $(C_{\mathbb{R}}(\mathbb{U}, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{K})$, *donde*

$$C_{\mathbb{R}}(\mathbb{U}, \mathbb{R}) \quad = \quad \{f \in F_{\mathbb{R}}(\mathbb{U}, \mathbb{R}) \mid f \text{ es una función continua}\}$$

Y las operaciones interna y externa son definidas respectivamente por,

(1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Ejemplo 1.1.7. *El espacio vectorial de las funciones reales derivables definidas en* $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}$, *para* $\mathbb{U} \neq \emptyset$; $(D_{\mathbb{R}}(\mathbb{U}, \mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}))$, *donde*

$$D_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R}) \quad = \quad \{f \in F_{\mathbb{R}}(\mathbb{U},\mathbb{R}); \mid f \text{ es una función derivable en } U\}$$

Y las operaciones interna y externa son definidas respectivamente por,

(1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

2. Subespacios

Si consideramos un $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$ entonces por definición $\mathbb{V} \neq \emptyset$. Así que

$$u \in \mathbb{V} \Longrightarrow \lambda u \in \mathbb{V}, \text{ para cada } \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \mathbb{V} = \{0_{\mathbb{V}}\} \ \vee \ \mathbb{V} \text{ tiene infinitos elementos}$$

Esta observación hace difícil pensar en una forma de caracterizar a un espacio vectorial no nulo. No obstante remirando nuestros ejemplos podemos encontrar espacios vectoriales incluidos en otros espacios vectoriales.

En efecto

(1) $\mathbb{K}_n[x] \subset \mathbb{K}[x] \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$. Pues

- $\partial(p(x) + q(x)) \leq max\{\partial(p(x)), \partial(q(x))\}$ y
- $\partial(\lambda p(x)) = \partial(p(x))$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$

(2) $D_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R}) \subset C_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R}) \subset F_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R})$. Pues;

- La adición de funciones continuas es una función continua,y el producto de un escalar por una función continua es función continua
- Análogamente, acontece con las funciones derivables.

Dado que necesitamos representar datos, parece razonable considerar la observación anterior para hacer la siguiente definición.

Definición 2.1. *Sea $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$. $\mathbb{W}$ será llamado un Subespacio vectorial de V si*

- $W \neq \emptyset$
- *W es un K-espacio vectorial con las mismas operaciones que $\mathbb{V}$*

Usaremos la notación: $\mathbb{U} \leq \mathbb{V}$

Ejemplo 2.1.1. $\{0_{\mathbb{V}}\} \leq \mathbb{V}$ *y* $\mathbb{V} \leq \mathbb{V}$ *son conocidos como subespacios triviales.*

Ejemplo 2.1.2. $\mathbb{K}_n[x] \leq \mathbb{K}[x] \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$

Ejemplo 2.1.3. $C_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R}) \leq F_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R})$

Ejemplo 2.1.4. $D_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R}) \leq C_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R}) \wedge D_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R}) \leq F_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R})$

Sin embargo, el avance en términos de la representación de datos ”eficiente” es nula, no obstante, podemos observar lo siguiente:

Observación 2.1.5. *Si* $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ *entonces por definición* $(\mathbb{W}, +, \cdot, \mathbb{K})$ *es un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial. Así que verifica naturalmente las propiedades:*

(1) $u \in \mathbb{W} \wedge v \in \mathbb{W} \Longrightarrow (u+v) \in \mathbb{W}$

(2) $u \in \mathbb{W} \wedge \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda u \in \mathbb{W}$

Luego, podemos resumir lo anterior en la siguiente

$$\mathbb{W} \leq \mathbb{V} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} u \in \mathbb{W} \wedge v \in \mathbb{W} & \Longrightarrow (u+v) \in \mathbb{W} \\ & \wedge \\ u \in \mathbb{W} \wedge \lambda \in \mathbb{K} & \Longrightarrow \lambda u \in \mathbb{W} \end{cases} \tag{1}$$

Recíprocamente, supongamos que $\mathbb{W}$ *satisface las condiciones:*

(1) $u \in \mathbb{W} \wedge v \in \mathbb{W} \Longrightarrow (u+v) \in \mathbb{W}$

(2) $u \in \mathbb{W} \wedge \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda u \in \mathbb{W}$ *entonces*

   (a) $W \neq \emptyset$ *es supuesto inicial*

   (b) *De las propiedades asumidas, sigue que existen operaciones* $+$ *y* $\cdot$ *en* W*, y además como* V *es un espacio vectorial entonces a fortiori* $(W, +, \cdot, K)$ *es un* K*-espacio vectorial, y por ende un subespacio del espacio* $\mathbb{V}$*.*

De la observación concluimos una caracterización que nos permite verificar en forma más eficiente, si un subconjunto de un espacio vectorial es o no es un subespacio vectorial, por su importancia le daremos el rango de teorema.

Teorema 2.2. Caracterización estructural de subespacio vectorial

Consideremos un espacio vectorial $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{K})$ *y* $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$

$$\boxed{\mathbb{W} \leq \mathbb{V} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (i) & \mathbb{W} \neq \emptyset \\ (ii) & u \in \mathbb{W} \wedge v \in \mathbb{W} \Longrightarrow (u+v) \in \mathbb{W} \\ (iii) & u \in \mathbb{W} \wedge \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda u \in \mathbb{W} \end{cases}}$$

Ejemplo 2.2.1. *Usemos el* **Teorema 2.2** *para mostrar que* $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$

En efecto, siguiendo la guía de nuestro teorema podemos generar la siguiente estrategia:

Etapa 1. Debemos verificar que $\mathbb{W} \neq \emptyset$

$(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ *y* $0 + 0 - 0 = 0$*. Así que* $(0, 0, 0) \in \mathbb{W}$

Etapa 2. Mostremos que si $u \in \mathbb{W}$ *y* $v \in \mathbb{W}$ *entonces* $(u+v) \in \mathbb{W}$:

$$\begin{aligned} u \in W &\Longleftrightarrow u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \wedge u_1 + u_2 - u_3 = 0 \quad (\star) \\ v \in W &\Longleftrightarrow v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \wedge v_1 + v_2 - v_3 = 0 \quad (\star\star) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) \qquad [\text{ ver } (\star) \text{ y } (\star\star)] \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \quad (\text{ Suma en } \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

Luego,

$$u + v \in \mathbb{R}^3 \tag{2}$$

De (2),concluimos que $(u+v)$ *es un buen candidato para pertenecer a* W*, pero falta verificar si satisface la condición que caracteriza* $\mathbb{W}$.

Para ver esto, debemos operar como sigue:

$$\begin{aligned} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) &= u_1 + v_1 + u_2 + v_2 - u_3 - v_3 \\ &= (u_1 + u_2 - u_3) + (v_1 + v_2 - v_3) \\ &= 0 + 0 \qquad (\text{ ver } (\star) \text{ y } (\star\star)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusión, $(u+v) \in \mathbb{W}$

Etapa 3. Debemos verificar que si $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $u \in \mathbb{W}$ *entonces* $\lambda u \in \mathbb{W}$:

$$\lambda u = \lambda(u_1, u_2, u_3) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3) \in \mathbb{R}^3$$

Por otra parte,

$$\lambda u_1 + \lambda u_2 - \lambda u_3 = \lambda(u_1 + u_2 - u_3) = \lambda 0 = 0$$

Conclusión, $\lambda u \in \mathbb{W}$, *y* $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^3$

Ejemplo 2.2.2. *Usemos el* **Teorema 2.2** *para mostrar que*

$$\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A + A^t = (0)\} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

En efecto, siguiendo la guía de nuestro teorema podemos generar la siguiente estrategia:

Etapa 1. Debemos verificar que $\mathbb{W} \neq \emptyset$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$$

Etapa 2. Debemos mostrar que:

$$u \in \mathbb{W} \wedge v \in \mathbb{W} \Longrightarrow (u+v) \in \mathbb{W}$$

Si $u \in \mathbb{W}$ *y* $v \in \mathbb{W}$ *entonces*

$$\begin{aligned}
u \in \mathbb{W} &\iff u \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge u + u^t = (0)\\
&\iff u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&\iff u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&\iff u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} 2u_{11} & u_{12}+u_{21} \\ u_{21}+u_{12} & 2u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
v \in \mathbb{W} &\iff v \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge v + v^t = (0)\\
&\iff v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&\iff v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&\iff v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} 2v_{11} & v_{12}+v_{21} \\ v_{21}+v_{12} & 2v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\star\star)
\end{aligned}$$

entonces por una parte,

$$u+v = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

Y por otra,

$$\begin{aligned}
u+v+(u+v)^t &= \begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{pmatrix}^t\\
&= \begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{21}+v_{21} \\ u_{12}+v_{12} & u_{22}+v_{22} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2(u_{11}+v_{11}) & (u_{12}+v_{12})+(u_{21}+v_{21}) \\ (u_{21}+v_{21})+(u_{12}+v_{12}) & 2(u_{22}+v_{22}) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2u_{11}+2v_{11} & (u_{12}+u_{21})+(v_{12}+v_{21}) \\ (u_{21}+u_{21})+(v_{12}+v_{12}) & 2u_{22}+2v_{22} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2u_{11} & (u_{12}+u_{21}) \\ (u_{21}+u_{21}) & 2u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2v_{11} & (v_{12}+v_{21}) \\ (v_{12}+v_{12}) & 2v_{22} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\textit{De } (\star) \textit{ y } (\star\star))\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así que, $(u+v) \in \mathbb{W}$

Etapa 3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$\lambda u = \lambda \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_{11} & \lambda u_{12} \\ \lambda u_{21} & \lambda u_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\lambda u + (\lambda u)^t &= \begin{pmatrix} \lambda u_{11} & \lambda u_{12} \\ \lambda u_{21} & \lambda u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda u_{11} & \lambda u_{12} \\ \lambda u_{21} & \lambda u_{22} \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} \lambda u_{11} & \lambda u_{12} \\ \lambda u_{21} & \lambda u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda u_{11} & \lambda u_{21} \\ \lambda u_{12} & \lambda u_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\lambda u_{11} & \lambda u_{12} + \lambda u_{21} \\ \lambda u_{21} + \lambda u_{12} & 2\lambda u_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\lambda u_{11} & \lambda(u_{12} + u_{21}) \\ \lambda(u_{21} + u_{12}) & 2\lambda u_{22} \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} 2u_{11} & (u_{12} + u_{21}) \\ (u_{21} + u_{12}) & 2u_{22} \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así que $\lambda u \in \mathbb{W}$*, y* $\mathbb{W} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

Ejemplo 2.2.3. *Si* $\mathbb{W} = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}_n[x] \mid \sum_{i=0}^{n} i a_i = 0 \right\}$ *entonces* $W \leq \mathbb{R}_n[x]$

En efecto

Etapa 1. $p(x) = 0 \in \mathbb{W}$*, pues* $\sum_{i=0}^{n} i \cdot 0 = 0$

Etapa 2. Si $p(x) \in \mathbb{W}$ $q(x) \in \mathbb{W}$ *entonces*

$$\begin{aligned}
p(x) \in \mathbb{W} &\iff p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \wedge \sum_{i=0}^{n} i a_i = 0 \\
q(x) \in \mathbb{W} &\iff p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \wedge \sum_{i=0}^{n} i b_i = 0
\end{aligned}$$

Ahora, por una parte;

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i \in \mathbb{R}_n[x]$$

Y por otra parte;

$$\sum_{i=0}^{n} i(a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{n} (i a_i + i b_i) = \sum_{i=0}^{n} i a_i + \sum_{i=0}^{n} i b_i = 0 + 0 = 0$$

Conclusión $(p(x) + q(x)) \in \mathbb{W}$

Etapa 3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces por una parte;

$$\lambda p(x) = \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) x^i \in \mathbb{R}_n[x]$$

Y por otra parte;

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda i a_i = \lambda \sum_{i=0}^{n} i a_i = \lambda 0 = 0$$

Así que, $\lambda p(x) \in \mathbb{W}$ y $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_n[x]$

Ejemplo 2.2.4. *Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$- espacio vectorial entonces $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{W}$.*

En efecto

$$\begin{aligned} \mathbb{W} \leq \mathbb{V} &\implies \lambda \cdot u \in \mathbb{W} \quad (\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{K}) \wedge (\forall u; u \in \mathbb{W}) \\ &\implies 0 \cdot u \in \mathbb{W} \qquad (Pues,\ 0 \in \mathbb{K}) \\ &\implies 0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{W} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.5. *Si $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - 2z = \lambda\}$ entonces determinemos el conjunto.*

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathbb{W} \leq \mathbb{R}^3\}$$

Solución

Debemos determinar los elementos del conjunto $\mathbb{S}$, y entonces es necesario entrar al conjunto.

Etapa 1. $\lambda \in \mathbb{S} \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mathbb{W} \leq \mathbb{R}^3$

Etapa 2. $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^3 \implies (0, 0, 0) \in \mathbb{W}$, *esto sigue del ejemplo anterior.*

Etapa 3. $(0, 0, 0) \in \mathbb{W} \iff (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \wedge 0 + 4 \cdot 0 \cdot 2 = \lambda \iff (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \wedge \lambda = 0$

Luego, $0 \in \mathbb{S}$ *y* $\{0\} \subset \mathbb{S}$

Etapa 4. Si $[u \in \mathbb{W} \wedge v \in \mathbb{W} \implies (u + v) \in \mathbb{W}]$ *entonces en particular debe ocurrir lo siguiente:*

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} &\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x + 4y - 2z = \lambda \\ 2u \in \mathbb{W} &\iff 2u = (2x, 2y, 2z) \in \mathbb{R}^3 \wedge 2x + 8y - 4z = \lambda \\ &\implies 2\lambda = \lambda \\ &\implies \lambda = 0 \end{aligned}$$

Etapa 5. Como $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces para $u = (x, y, z) \in \mathbb{W}$, $\lambda x + 4\lambda y - 2\lambda z = \lambda$. Pero,

$$\lambda x + 4\lambda y - 2\lambda z = \lambda \implies \lambda^2 = \lambda \implies \lambda = 0 \vee \lambda = 1$$

Así que, $\mathbb{S} = \{0\}$ *y* $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - 2z = 0\}$

Conclusión 2.2.6. *El origen o elemento neutro del espacio pertenece a cada subespacio vectorial. Es decir una condición necesaria para ser subespacio es que el origen pertenezca a él.*

Un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es nulo o tiene infinitos elementos.

Ejemplo 2.2.7. *Si $AX = B$ es un sistema lineal de orden $(n \times m)$ y $\mathbb{S} = \{U \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \mid AU = B\}$, $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C})$ entonces*

$$\mathbb{S} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \iff B = (0)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \mathbb{S} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) &\Longrightarrow (0) \in \mathbb{S} \\ &\Longrightarrow A \cdot (0) = B \\ &\Longrightarrow (0) = B \end{aligned}$$

Luego, hemos mostrado que: $\mathbb{S} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \Longrightarrow B = (0)$

Recíprocamente, si $B = (0)$ entonces

1. $A(0) = (0)$, *luego* $\mathbb{S} \neq \emptyset$
2. *Si $U_1 \in \mathbb{S} \wedge U_2 \in \mathbb{S}$ entonces $A(U_1 + U_2) = A(U_1) + A(U_2) = (0) + (0) = (0)$. Así que $(U_1 + U_2) \in \mathbb{S}$*
3. *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $U_1 \in \mathbb{S}$ entonces $A\lambda U_1 = \lambda A U_1 = \lambda(0) = (0)$. Así que $\lambda U_1 \in \mathbb{S}$*

Luego, hemos mostrado que: $B = (0) \Longrightarrow \mathbb{S} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$. Así que

$$\mathbb{S} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \iff B = (0)$$

Conclusión 2.2.8. *Las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de orden $(n \times m)$, constituyen un subespacio vectorial. Por ende un Sistema lineal homogéneo o tiene únicamente la solución nula o tiene infinitas soluciones*

Observación 2.2.9. *Desde un punto de vista estructural el teorema 2.2, es una herramienta poderosa para decidir si un conjunto es o no, un subespacio en un espacio vectorial dado, no obstante el tiene un problema que lamentablemente para nosotros es crucial; pues, " no nos dice quienes son los miembros del subespacio $\mathbb{W}$."*

2.3. Ejercicios Propuestos de Subespacios.

(1) Demuestre que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}$ descrito.

   (a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 0\}$

   (b) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 10x - 5y = 0\}$

   (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

   (d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + y - z = 0\}$

   (e) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z - w = 0\}$

(f) $W = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x = \dfrac{y + 2z - w}{5}\right\}$

(2) Determine si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ son subespacios para n y m adecuados.

(a) $W = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = -A^t\}$, donde A^t significa la matriz traspuesta de la matriz A

(b) $W = \{(a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid tr(a_{ij}) = 0\}$. Donde $tr(a_{ij}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, y se llama la traza de la matriz (a_{ij})

(c) $W = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid \det(A) \neq 0\}$

(d) $W = \left\{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid a_{ij} = \begin{cases} 1 & : \text{ Si } j = n+1-i \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases}\right\}$

(e) $W = \left\{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & : \text{ Si } j \leq i \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases}\right\}$

(f) $W = \left\{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & : \text{ Si } j \geq i \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases}\right\}$

(3) Demuestre que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}_n[x]$ son subespacios para n adecuado.

(a) $W = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid p(-3) = 0\}$

(b) $W = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid p(\sqrt{2}) = 0\}$

(c) $W = \left\{p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid \sum_{i=0}^{n} j a_i = 0; j \in [\mathbb{R} - \{0\}]\right\}$

(d) $W = \left\{p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid \sum_{i=0}^{n} i a_i = 0\right\}$

3. La Idea de Generador

En concordancia con la observación anterior no estamos cumpliendo nuestro objetivo: Que es determinar rápida y eficientemente los elementos del espacio vectorial, así que si queremos cumplir nuestro objetivo debemos cambiar el punto de vista. Como orientación debemos recordar que un espacio vectorial o tiene un elemento o tiene infinitos elementos. Por tanto, el punto es, generar un proceso que transforme en una "idea finita", lo que en realidad es en concreto no finito. Con esto en mente,

(1) Miremos en primer lugar, desde un punto de vista diferente al subespacio de $\mathbb{R}^3$. (Mirar desde otro punto de vista significa, interpretar de un nueva forma las operaciones permitidas en el espacio).

$$\mathbb{W}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - 2z = 0\} \tag{3}$$

Ingresemos directamente al conjunto, es decir:

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W}_1 &\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ x + 4y - 2z = 0 \\ &\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ x = 2z - 4y \\ &\iff u = (2z - 4y, y, z); \ z \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R} \\ &\iff u = (2z, 0, z) + (-4y, y, 0); \ z \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R} \\ &\iff u = z(2, 0, 1) + y(-4, 1, 0); \ z \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Así que,

$$\mathbb{W}_1 \quad = \quad \{\lambda_1(2,0,1) + \lambda_2(-4,1,0) \mid (\lambda_1 \in \mathbb{R}) \wedge (\lambda_2 \in \mathbb{R})\}$$

La conclusión es la siguiente:

$$\boxed{u \in \mathbb{W}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Tiene solución en } \mathbb{K} \text{ la ecuación } u = \overbrace{a_1}^{\substack{\text{incognita}\\ \downarrow}} (2,0,1) + \overbrace{a_2}^{\substack{\text{incognita}\\ \downarrow}} (-4,1,0)}$$

(2) Intentemos la misma estrategia con el subespacio

$$\mathbb{W}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \wedge z = 0\} \tag{4}$$

De nuevo, entremos al conjunto.

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W}_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ x = y \wedge z = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad u = (x,x,0) \wedge x \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \quad u = x(1,1,0) \wedge x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Así que,

$$\mathbb{W}_2 \quad = \quad \{\lambda(1,1,0) \mid \lambda \in R\}$$

La conclusión es la siguiente:

$$\boxed{u \in \mathbb{W}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Tiene solución en } \mathbb{K} \text{ la ecuación } u = \overbrace{a_1}^{\substack{\text{incognita}\\ \downarrow}} (2,0,1)}$$

(3) Ahora tratemos de aplicar lo aprendido en el conjunto,

$$\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in \mathbb{W}_1 \wedge w_2 \in \mathbb{W}_2\}$$

(a) $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 \neq \emptyset$

En efecto

$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) = 0(2,0,1) + 0(-4,1,0) + 0(1,1,0) \Longrightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$

Más aún, $0_{\mathbb{R}^3} \in \mathbb{W}_1$, pues $(0,0,0) = 0(2,0,1) + 0(-4,1,0)$ y $0_{\mathbb{R}^3} \in \mathbb{W}_2$, pues $(0,0,0) = 0(1,1,0)$. Así
que $0_{\mathbb{R}^3} \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$

(b) Por otra parte,

$$\begin{aligned} u\in \mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2 &\iff u\in\mathbb{W}_1\wedge u\in\mathbb{W}_2\\ &\iff u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\wedge x+4y-2z=0\wedge x=y\wedge z=0\\ &\iff u=(x,x,0)\in\mathbb{R}^3\wedge x+4x=0\\ &\iff u=(x,x,0)\in\mathbb{R}^3\wedge x=0\\ &\iff u=(0,0,0)\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2 = \{(0,0,0)\}=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

(c) Ahora para $u\in\mathbb{R}^3$ arbitrario tratemos de resolver la ecuación

$$u = x_1(2,0,1)+x_2(-4,1,0)+x_3(1,1,0)$$

Si conseguimos ese resultado entonces se verificará que

(i) $\mathbb{R}^3=\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2$

(ii) Tendremos una fórmula para expresar los elementos de $\mathbb{R}^3$ en términos de los vectores de $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$.

Vamos entonces a resolver el problema para $u=(x,y,z)$ arbitrario

$$\begin{aligned}(x,y,z)=x_1(2,0,1)+x_2(-4,1,0)+x_3(1,1,0) &\iff (x,y,z)=(2x_1-4x_2+x_3,x_2+x_3,x_1)\\ &\iff \left.\begin{array}{lcl} 2x_1-4x_2+x_3 &=& x\\ x_2+x_3 &=& y\\ x_1 &=& z\end{array}\right| \quad (*)\end{aligned}$$

Ahora resolvemos $(*)$, usando nuestras técnicas

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & -4 & 1 & x\\ 0 & 1 & 1 & y\\ 1 & 0 & 0 & z\end{array}\right) \quad (l_1\to l_1-l_3) \quad \left(\begin{array}{rrr|l} 0 & -4 & 1 & x-2z\\ 0 & 1 & 1 & y\\ 1 & 0 & 0 & z\end{array}\right) \quad (l_1\to l_1+4l_2)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 0 & 0 & 5 & x+4y-2z\\ 0 & 1 & 1 & y\\ 1 & 0 & 0 & z\end{array}\right) \quad (l_1\to \tfrac{1}{5}l_1) \quad \left(\begin{array}{rrr|c} 0 & 0 & 1 & \frac{x+4y-2z}{5}\\ 0 & 1 & 1 & y\\ 1 & 0 & 0 & z\end{array}\right) \quad (l_2\to l_2-l_1)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 0 & 0 & 1 & \frac{x+4y-2z}{5}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{-x+y+2z}{5}\\ 1 & 0 & 0 & z\end{array}\right)$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z\\ \dfrac{y-x+2z}{5}\\ \dfrac{x+4y-2z}{5}\end{pmatrix} \Longrightarrow (x,y,z)=z(2,0,1)+\frac{y-x+2z}{5}(-4,1,0)+\frac{x+4y-2z}{5}(1,1,0)$$

(d) Finalmente, si adoptamos las siguientes notaciones:

$$\alpha = \{(2,0,1),(-4,1,0),5(1,1,0)\}$$

$$[(x,y,z]_\alpha = \begin{pmatrix} z \\ \dfrac{y-x+2z}{5} \\ \dfrac{x+4y-2z}{5} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (x,y,z) = \underbrace{z(2,0,1) + \frac{y-x+2z}{5}(-4,1,0)}_{\in \mathbb{W}_1} + \underbrace{\frac{x+4y-2z}{5}(1,1,0)}_{\in \mathbb{W}_2}$$

Hemos conseguido mostrar que

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$$

Y además podemos ahora ejercitar el nuevo símbolo:

(i) Para $u = (2,0,1)$ tenemos

$$[2,0,1]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{0-2+2}{5} \\ \dfrac{2+0-2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pues,

$$(2,0,1) = (2,0,1) + 0(-4,1,0) + 0(1,1,0)$$

(ii) para $u = (-4,1,0)$ tenemos

$$[(-4,1,0)]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pues,

$$(-4,1,0) = 0(2,0,1) + 1(-4,1,0) + 0(1,1,0)$$

(iii) Para u=$(1,1,0)$ tenemos

$$[(1,1,0)]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pues,

$$(1,1,0) = 0(2,0,1) + 0(-4,1,0) + 1(1,1,0)$$

(iv) Para $u = (1,1,1)$ tenemos

$$[1,1,1]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Pues,

$$(1,1,1) = (2,0,1) + \frac{2}{5}(-4,1,0) + \frac{3}{5}(1,1,0)$$

(4) Para el caso $\alpha = \{(2,0,1),(-4,1,0),5(1,1,0)\}$ hemos encontrado que $\mathbb{R}^3$ se descompone en la suma del Plano $\mathbb{W}_1$ y la recta $\mathbb{W}_2$. Similar a lo que sucede con el plano $\mathbb{R}^2$ que se descompone como la suma del eje x y del eje y.

Definición 3.1. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y considere los subconjuntos $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ tal que $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{V}$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V}$. Diremos que $\mathbb{V}$ es suma directa de los subespacios $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ en símbolos $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$. Si*

(1) $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$

(2) $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$

Ejemplo 3.1.1. *Si $\mathbb{W}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - 2z = 0\}$ y $\mathbb{W}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \wedge z = 0\}$ entonces*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &= \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2 \\ &= \langle\{(2,0,1),(-4,1,0)\}\rangle \oplus \langle\{(1,1,0)\}\rangle \end{aligned}$$

Teorema 3.2. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ entonces*

$$\mathbb{W} = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \left\{\sum_{i=1}^n r_i \cdot v_i \mid r_i \in \mathbb{K}\ (1 \leq i \leq n)\right\} \leq \mathbb{V}$$

En efecto

(1) $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ *y* $0_{\mathbb{V}} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$. *Así que* $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{W}$, *y* $\mathbb{W} \neq \emptyset$

(2) *Sean $u \in \mathbb{W}$, $w \in \mathbb{W}$ entonces*

$$\left.\begin{aligned} u \in W &\iff u = \sum_{i=1}^n a_i \cdot v_i \mid a_i \in \mathbb{K}\ (1 \leq i \leq n) \\ w \in W &\iff w = \sum_{i=1}^n b_i \cdot v_i \mid b_i \in \mathbb{K}\ (1 \leq i \leq n) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow u + w = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \cdot v_i \in \mathbb{W}$$

(3) *Sean $u \in \mathbb{W}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces*

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n (\lambda \cdot a_i) \cdot v_i \in \mathbb{W}$$

Así que $W \leq V$

Definición 3.2.1. *Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial entonces el conjunto*

(1) $\mathbb{W} = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \left\{\sum_{i=1}^n r_i \cdot v_i \mid r_i \in \mathbb{K}\ (1 \leq i \leq n)\right\}$. *Se llamará subespacio generado por $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y cada v_i para $i = 1, 2, \dots, n$ se llamará un generador.*

(2) *$u \in V$, se llamará una combinación lineal de $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ si $u \in \mathbb{W}$, es decir existen n - escalares, digamos $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tal que*

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \cdot v_i$$

Es decir, los elementos de $\mathbb{W}$ se llaman combinaciones lineales de $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

3.3. Ejercicios Propuestos de Generadores.

(1) Sea $\mathbb{W} = \langle\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$

(a) Demuestre que $(2,2,2) \in \mathbb{W}$. Es decir, resuelva la ecuación vectorial

$$(2,2,2) = a_1(1,0,0) + a_2(1,1,0) + a_3(1,1,1)$$

(b) Demuestre que $(x,y,z) \in \mathbb{W}$, para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

(c) Concluya que $\mathbb{R}^3 = \langle\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}\rangle$

(2) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2\}$. Demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2\}\rangle = \langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle$$

(3) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2\}$. Demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2\}\rangle = \langle\{v_1 - v_2, v_1 + v_2\}\rangle$$

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Si $\beta = \{w_1, \dots, w_n\} \subset \mathbb{V}$ tal que $w_k = \sum_{i=1}^{k} v_i$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$ entonces demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$$

(5) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Si $\beta = \{w_1, \dots, w_n\} \subset V$ tal que $w_k = \sum_{i=1}^{k} jv_i$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$ entonces demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$$

(6) Demuestre que

- $\mathbb{W}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$
- $\mathbb{W}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \wedge y - z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$
- $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2\} \leq \mathbb{R}^3$
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$
- $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

En general, si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{V}$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V}$ entonces V se dice “Suma directa de los subespacios $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ ”si

- $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$
- $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$

En tal caso, notamos $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \bigoplus \mathbb{W}_2$

(7) Demuestre que

$$\mathbb{R}^2 = \ \{\text{eje x}\} \ \oplus \ \{\text{eje y}\}$$

(8) Demuestre que

$$\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) = \ \{\text{ matrices simétricas}\} \oplus \ \{\text{ matrices antisimétricas }\}$$

(9) Demuestre que

$$\mathbb{R}_n[x] = \mathbb{R}_0[x] \oplus \langle\{x, x^2, \dots, x^n\}\rangle$$

4. Sistemas de Generadores

Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial entonces $\mathbb{V} \leq \mathbb{V}$. Así que tiene sentido preguntar, ¿si existen o no generadores para el propio $\mathbb{V}$?. En general podemos hacer la siguiente

Definición 4.1. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$, α será llamado un sistema de generadores para $\mathbb{V}$ si*

$$\mathbb{V} \quad = \quad \langle\alpha\rangle = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle$$

Equivalentemente: α es un sistema de generadores si para cada $v \in V$ existen n - escalares, digamos $a_1, a_2, \dots, a_n$ tales que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

O en lenguaje más pragmático:

α es un sistema de generadores si para cada $v \in V$ la ecuación vectorial

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \tag{5}$$

tiene solución.

Ejemplo 4.1.1. *$c(n) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, donde*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

es un sistema de generadores para $\mathbb{R}^n$, ya que

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \tag{6}$$

Por la forma de (6), se acostumbra a llamar a "c(n) con el nombre de generadores canónicos. "

Ejemplo 4.1.2. *$m(n \times s) = \{E_{ij} \mid (1 \leq i \leq n) \wedge (1 \leq j \leq s)\}$, donde*

$$E_{ij} = \begin{cases} 1: & \text{en la posición } ij \\ 0: & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Es un sistema de generadores, también conocido como sistema de generadores canónico de $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times s)$

Así por ejemplo, para $n = s = 2$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Ejemplo 4.1.3. *$p(n) = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ son los generadores canónicos de $\mathbb{R}_n[x]$,*

pues,

$$q(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n x^n$$

Es decir,

$$\mathbb{R}_n[x] = \langle \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \rangle$$

4.2. Construcción de sistemas de generadores. Estudiemos algunas situaciones que nos permiten construir sistemas de generadores.

(1) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2\}$ entonces

$$V = \langle \{v_1, v_2\} \rangle \Longrightarrow V = \langle \{v_1, v_1 + v_2\} \rangle$$

En efecto

(a) En este caso tenemos que demostrar que $V = \langle \{v_1, v_1 + v_2\} \rangle$, es decir debemos mostrar que la ecuación vectorial,

$$v = a_1 v_1 + a_2(v_1 + v_2) \tag{7}$$

Tiene solución para cada $v \in V$.

(b) Analizamos los datos.

Como $V = \langle \{v_1, v_2\} \rangle$ y $v \in V$ entonces tiene solución la ecuación vectorial

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 \tag{8}$$

Es decir, existen $b_1 \in \mathbb{K}$ y $b_2 \in \mathbb{K}$ tal que (8) es una identidad.

(c) Supongamos por un instante que la ecuación vectorial (7), tiene solución entonces

$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + a_2(v_1+v_2) \\ &= a_1v_1 + a_2v_1 + a_2v_2 \\ &= (a_1+a_2)v_1 + a_2v_2 \end{aligned}$$

Luego, basta que tomemos:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & + & a_2 & = & b_1 \\ & & a_2 & = & b_2 \end{array}$$

De donde sigue que, $a_1 = b_1 - b_2 \quad \wedge \quad a_2 = b_2$ y entonces hemos mostrado que

$$v = b_1v_1 + b_2v_2 \implies v = (b_1-b_2)v_1 + b_2(v_1+v_2)$$

Y la conclusión es que $V = \langle\{v_1, v_1+v_2\}\rangle$

Una solución Alternativa para mostrar que $\langle\{v_1, v_2\}\rangle = \langle\{v_1, v_1+v_2\}\rangle$

Observemos que

(i) $v_1 = 1\cdot v_1 + 0\cdot(v_1+v_2)$, luego $v_1 \in \langle\{v_1, v_1+v_2\}\rangle$
(ii) $v_2 = (-1)\cdot v_1 + 1\cdot(v_1+v_2)$, luego $v_2 \in \langle\{v_1, v_1+v_2\}\rangle$
(iii) Así que,

$$\langle\{v_1, v_2\}\rangle \subset \langle\{v_1, v_1+v_2\}\rangle \tag{9}$$

Análogamente,

(i) $v_1 = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2$, luego $v_1 \in \langle\{v_1, v_2\}\rangle$
(ii) $v_1+v_2 = 1\cdot v_1 + 1\cdot v_2$, luego$v_1+v_2 \in \langle\{v_1, v_2\}\rangle$

(iii) Así que,

$$\langle\{v_1, v_1+v_2\}\rangle \subset \langle\{v_1, v_2\}\rangle \tag{10}$$

Luego, de (9) y (10), sigue que

$$\langle\{v_1, v_1+v_2\}\rangle = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$$

(2) En general si V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subset V$. entonces

$$V = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle \Longrightarrow V = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \quad \text{donde } w_k = \sum_{i=1}^{k} v_i; \ \text{y } (1 \leq k \leq n)$$

En efecto

♦ En primer lugar, para cada $k = 1, 2, \dots, n$ tenemos que:

$$w_k = \sum_{i=1}^{k} v_i = 1\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + \cdots + 1\cdot v_n \Longrightarrow w_k \in \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle \tag{11}$$

♦ En segundo lugar, por definición:

$$u \in \langle \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \rangle \Longleftrightarrow u = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_n w_n \tag{12}$$

♦ Aplicando (11) en (12) tenemos que

$$\begin{aligned}
u \in \langle \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \rangle \quad &\Longleftrightarrow \quad u = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_n w_n \rangle \\
&\Longrightarrow \quad u = a_1 \sum_{i=1}^{1} v_i + a_2 \sum_{i=1}^{2} v_i + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{n} v_i \\
&\Longrightarrow \quad u = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)}_{c_1} v_1 + \underbrace{\left(\sum_{i=2}^{n} a_i\right)}_{c_2} v_2 + \cdots + \underbrace{\left(\sum_{i=n-1}^{n} a_i\right)}_{c_{n-1}} v_{n-1} + \underbrace{a_n}_{c_n} v_n \\
&\Longrightarrow \quad u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_{n-1} v_{n-1} + c_n v_n \\
&\Longrightarrow \quad u \in \langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle
\end{aligned}$$

♦ Conclusión:

$$\langle \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \rangle \subset \langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle \tag{13}$$

♦ Recíprocamente, $v_1 = w_1$ y para $k = 2, 3 \dots, n$ $v_k = w_k - w_{k-1}$. Así que

$$\begin{aligned}
u \in \langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle \quad &\Longleftrightarrow \quad u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \\
&\Longrightarrow \quad u = a_1 w_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i (w_i - w_{i-1}) \\
&\Longrightarrow \quad u = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) w_i \\
&\Longrightarrow \quad u \in \langle \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \rangle
\end{aligned}$$

♦ Conclusión:

$$\langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle \subset \langle \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \rangle \tag{14}$$

♦ Finalmente, de (13) y (14). Sigue que

$$\langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle = \langle \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \rangle$$

(3) Si consideramos los conjuntos de polinomios

$\mathbb{U} = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_0 - a_1 = 0 \wedge a_2 - a_3 = 0\}$ y
$\mathbb{W} = \{q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid b_0 + b_1 = 0 \wedge b_2 + b_3 = 0\}$ entonces

(a) $\mathbb{U} \leq \mathbb{R}_3[x]$ y $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_3[x]$

En efecto

Usaremos la técnica de los generadores para mostrar que tanto $\mathbb{U}$ como $\mathbb{W}$ son subespacios

$$\begin{aligned}
p(x)\in\mathbb{U} &\iff p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in\mathbb{R}_3[x]\ \wedge\ a_0-a_1=0\wedge a_2-a_3=0\\
&\iff p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in\mathbb{R}_3[x]\ \wedge\ a_0=a_1\wedge a_2=a_3\\
&\iff p(x)=a_0+a_0x+a_2x^2+a_2x^3\ \wedge\ a_0\in\mathbb{R}\ \wedge\ a_2\in\mathbb{R}\\
&\iff p(x)=a_0(1+x)+a_2(x^2+x^3)\ \wedge\ a_0\in\mathbb{R}\ \wedge\ a_2\in\mathbb{R}\\
&\iff p(x)\in\langle\{1+x,x^2+x^3\}\rangle
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{U} \ = \ \langle\{1+x,x^2+x^3\}\rangle\le\mathbb{R}_3[x]$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
p(x)\in\mathbb{W} &\iff p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in\mathbb{R}_3[x]\ \wedge\ a_0+a_1=0\wedge a_2+a_3=0\\
&\iff p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in\mathbb{R}_3[x]\ \wedge\ -a_0=a_1\wedge -a_2=a_3\\
&\iff p(x)=a_0-a_0x+a_2x^2-a_2x^3\ \wedge\ a_0\in\mathbb{R}\ \wedge\ a_2\in\mathbb{R}\\
&\iff p(x)=a_0(1-x)+a_2(x^2-x^3)\ \wedge\ a_0\in\mathbb{R}\ \wedge\ a_2\in\mathbb{R}\\
&\iff p(x)\in\langle\{1-x,x^2-x^3\}\rangle
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{W} \ = \ \langle\{1-x,x^2-x^3\}\rangle\le\mathbb{R}_3[x]$$

(b) $\mathbb{R}_3[x]=\mathbb{W}\oplus\mathbb{U}$

En efecto

Ahora para mostrar que $\mathbb{R}_3[x]=\mathbb{U}\oplus\mathbb{W}$, **debemos resolver en primer lugar la ecuación**

$$\begin{aligned}
p(x) &= w+u \quad (w\in\mathbb{W}\ \wedge\ u\in\mathbb{U})\\
&= \underbrace{c_1(1-x)+c_2(x^2-x^3)}_{\overset{\shortparallel}{w}}+\underbrace{c_3(1+x)+c_4(x^2+x^3)}_{\overset{\shortparallel}{u}},\quad (\text{Para } p(x)\in\mathbb{R}_3[x])
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 &= c_1(1-x)+c_2(x^2-x^3)+c_3(1+x)+c_4(x^2+x^3)\\
&= c_1-c_1x+c_2x^2-c_2x^3+c_3+c_3x+c_4x^2+c_4x^3\\
&= c_1+c_3+c_3x-c_1x+c_4x^2+c_2x^2-c_2x^3+c_4x^3\\
&= c_1+c_3+(c_3-c_1)x+(c_2+c_4)x^2+(c_4-c_2)x^3
\end{aligned}$$

Así que,

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1 + c_3 & = & a_0 \\ -c_1 + c_3 & = & a_1 \\ c_2 + c_4 & = & a_2 \\ -c_2 + c_4 & = & a_3 \end{array}\right| \Longrightarrow \begin{array}{rcl} c_1 & = & \dfrac{a_0 - a_1}{2} \\ c_3 & = & \dfrac{a_0 + a_1}{2} \\ c_2 & = & \dfrac{a_2 - a_3}{2} \\ c_4 & = & \dfrac{a_2 + a_3}{2} \end{array}$$

Luego,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \underbrace{\frac{a_0 - a_1}{2}(1 - x) + \frac{a_2 - a_3}{2}(x^2 - x^3)}_{\in \mathbb{W}} + \underbrace{\frac{a_0 + a_1}{2}(1 + x) + \frac{a_2 + a_3}{2}(x^2 + x^3)}_{\in \mathbb{U}}$$

Por tanto,

$$\mathbb{R}_3[x] = \mathbb{W} + \mathbb{U}$$

En segundo lugar, debemos mostrar que $\mathbb{W} \cap \mathbb{U} = \{0_{\mathbb{R}_3[x]}\}$. Para ver esto hacemos

$$\begin{array}{rcl} p(x) \in \mathbb{W} \cap \mathbb{U} & \Longleftrightarrow & p(x) \in \mathbb{W} \wedge p(x) \in \mathbb{U} \\ & \Longleftrightarrow & p(x) = b_1(1 - x) + b_2(x^2 - x^3) \wedge p(x) = b_3(1 + x) + b_4(x^2 + x^3) \\ & \Longleftrightarrow & b_1 - b_1x + b_2x^2 - b_2x^3 = b_3 + b_3x + b_4x^2 + b_4x^3 \\ & \Longleftrightarrow & (b_1 = b_3) \wedge (-b_1 = b_3) \wedge (b_2 = b_4) \wedge (-b_2 = b_4) \\ & \Longleftrightarrow & b_1 = b_3 = 0 \wedge b_2 = b_4 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & p(x) = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \end{array}$$

De donde sigue lo pedido, $\mathbb{W} \cap \mathbb{U} = \{0_{\mathbb{R}_3[x]}\}$

(c) A partir de $\mathbb{U}$ y $\mathbb{W}$, obtenemos un sistema de generadores para $\mathbb{R}_3[x]$, pues

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \underbrace{\frac{a_0 - a_1}{2}(1 - x) + \frac{a_2 - a_3}{2}(x^2 - x^3)}_{\in \mathbb{W}} + \underbrace{\frac{a_0 + a_1}{2}(1 + x) + \frac{a_2 + a_3}{2}(x^2 + x^3)}_{\in \mathbb{U}}$$

Y,

$$\mathbb{R}_3[x] = \langle \{1 - x, x^2 - x^3, 1 + x, x^2 + x^3\} \rangle$$

En particular, en este sistema tenemos que.

$$\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right]_\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{a_0 - a_1}{2} \\ \\ \dfrac{a_2 - a_3}{2} \\ \\ \dfrac{a_0 + a_1}{2} \\ \\ \dfrac{a_2 + a_3}{2} \end{pmatrix}$$

5. Dependencia e Independencia Lineal

Siempre con la idea de fondo de construir un procedimiento finito que determine rápida y eficientemente los elementos de un espacio vectorial, y considerando que ya tenemos una representación vía el concepto de Sistema de generadores, ahora queremos garantizar que esta representación "es segura."

Para ello iniciamos nuestro análisis considerando un sistema de generadores $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de un espacio vectorial de $\mathbb{V}$, es decir,

$$\mathbb{V} = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle$$

Equivalentemente, para cada $u \in \mathbb{V}$ existen $c_1, c_2, \dots, c_n$ en $\mathbb{K}$ tal que

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_iv_i = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$$

O en lenguaje más pragmático: Para cada $v \in V$ la ecuación vectorial

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$$

tiene al menos una solución en $\mathbb{K}^n$

Motivados por lo anterior construyamos "una relación entre la teoría y la práctica."

Definición 5.1. *Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ un sistema de generadores para $\mathbb{V}$ entonces definimos la relación $[\ ]_\alpha : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{M}_\mathbb{K}(n \times 1)$ como sigue:*

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_\mathbb{K}(n \times 1) \Longleftrightarrow v = \sum_{k=1}^{n} c_kv_k \in \mathbb{V}$$

Ejemplo 5.1.1. *Si $\alpha = \{(1,1), (1,-1))\}$ entonces α es un sistema de generadores para $\mathbb{R}^2$, pues*

$$(x, y) \quad = \quad \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1)$$

Así que,

$$[(x,y)]_\alpha \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{x+y}{2} \\ \dfrac{x-y}{2} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.1.2. *Si* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ *un sistema de generadores para* $\mathbb{V}$ *entonces para,* $w \in \mathbb{V}$, $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$, *también genera* $\mathbb{V}$, *y*

$$[w]_\beta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow w = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k + 0 \cdot w \qquad (\text{ Pues, } \alpha \text{ genera } \mathbb{V})$$

Por otra parte, tenemos "una fuga de seguridad" ya que existe una representación diferente para w, *pues*

$$[w]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow w = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot v_k + 1 \cdot w$$

Observación 5.1.3. *Para caracterizar esta "fuga de seguridad", supongamos que* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *es un sistema de generadores para* $\mathbb{V}$ *y que* $u \in \mathbb{V}$ *tiene dos representaciones diferentes en este sistema entonces debemos tener*

(1) $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k v_k$ *y* $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k v_k$

(2) *Si estas representaciones son distintas entonces existe* $(i; 1 \leq i \leq n)$ *tal que* $a_i \neq b_i$

(3) *Luego, tenemos que*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k v_k = \sum_{k=1}^{n} b_k v_k \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) v_k = 0_{\mathbb{V}} \\ &\Longrightarrow \quad (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \cdots + \underbrace{(a_i - b_i)}_{\neq 0} v_i + \cdots + (a_n - b_n)v_n = 0_{\mathbb{V}} \end{aligned}$$

Así que, el $0_{\mathbb{V}}$ *se escribe, al menos de dos formas diferentes*

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{V}} &= 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n \\ &= (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \cdots + \underbrace{(a_i - b_i)}_{\neq 0} v_i + \cdots + (a_n - b_n)v_n \end{aligned}$$

Conclusión 5.1.4. *Si un vector* $u \in \mathbb{V}$ *se representa en más de una forma, como combinación lineal de los elementos de* α *entonces el vector nulo* $0_{\mathbb{V}}$ *se representa en más de una forma, como combinación lineal de los elementos de* α.
Luego, en virtud de nuestra lógica, podemos decir que: $0_{\mathbb{V}}$, *se escribe de una única forma como combinación lineal de los elementos de* α *entonces todo vector del espacio posee la misma propiedad.*

Definición 5.2. *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial, y* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. *Diremos que* α *es un conjunto linealmente independiente en* $\mathbb{V}$ *si* $0_{\mathbb{V}}$, *se escribe de una única forma como combinación lineal de los elementos de* α, *en símbolos Li. Caso contrario diremos que* α *es un conjunto linealmente dependiente, en símbolos Ld.*

Es decir, α es Li en $\mathbb{V}$ Si

$$a_iv_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \cdots + a_nv_n = 0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

Ejemplo 5.2.1. *Si $\alpha = \{1, 1+x, 1+x+x^2\} \subset \mathbb{K}_2[x]$ entonces α es Li en $\mathbb{K}_2[x]$.*

En efecto

De acuerdo a la definición. Si suponemos que $a_1 \cdot 1 + a_2(1+x) + a_3(1+x+x^2) = 0_{\mathbb{K}_2[x]}$ entonces debemos mostrar que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot 1 + a_2(1+x) + a_3(1+x+x^2) = 0_{\mathbb{K}_2[x]} &\Longrightarrow a_1 + a_2 + a_2x + a_3 + a_3x + a_3x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\
&\Longrightarrow (a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3)x + a_3x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + a_3 & = & 0 \\ a_2 + a_3 & = & 0 \\ a_3 & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow a_3 = a_2 = a_1 = 0
\end{aligned}$$

Luego, α es Li en $\mathbb{K}_2[x]$

Ejemplo 5.2.2. *Si $\beta = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1-x-2x^2\} \subset \mathbb{K}_2[x]$ entonces ¿ β es Li ó Ld en $\mathbb{K}_2[x]$?.*

Estudiemos el problema

Supongamos que $a_1 \cdot 1 + a_2(1+x) + a_3(1+x+x^2) + a_4(1-x-2x^2) = 0_{\mathbb{K}_2[x]}$ entonces

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_2x + a_3 + a_3x + a_3x^2 + a_4 - a_4x - 2a_4x^2 = 0 + 0x + 0x^2 &\Longleftrightarrow \\
(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_2 + a_3 - a_4)x + (a_3 - 2a_4)x^2 = 0 + 0x + 0x^2 &\Longleftrightarrow \\
\left.\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & = & 0 \\ a_2 + a_3 - a_4 & = & 0 \\ a_3 - 2a_4 & = & 0 \end{array}\right| \qquad (*)
\end{aligned}$$

Luego, β es Ld en $\mathbb{K}_2[x]$, pues, si A es la matriz de coeficientes del sistema $(*)$ entonces $\rho(A)$, puede ser como máximo 3, y el número de incógnitas es 4 de donde siguen que el sistema tiene infinitas soluciones.

Podemos determinar esas soluciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \; (l_1 \to l_1 - l_2) \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \; (l_2 \to l_2 - l_3) \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Las infinitas soluciones son de la forma: $a_1 = -2a_4$; $a_2 = -a_4$; $a_3 = 2a_4$ y su expresión es de la forma:

$$0 + 0x + 0x^2 \quad = \quad -2a_4 - a_4(1+x) + 2a_4(1+x+x^2) + a_4(1-x-2x^2) \quad (a_4 \in \mathbb{K})$$

6. Base y Dimensión

Ahora tenemos construidas y listas para usar, las piezas precisas para garantizar la existencia y unicidad de una representación como combinación lineal, para cada vector de un espacio vectorial. Partimos con la siguiente:

Definición 6.1. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Diremos que α es una base para el espacio vectorial $\mathbb{V}$ si*

(1) *α es un sistema de generadores para $\mathbb{V}$*
(2) *α es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{V}$*

Es decir, para cada $u \in \mathbb{V}$ existen únicos escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ tal que

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

Equivalentemente, la función

$$\begin{array}{ccccc} [\,]_\alpha & : & \mathbb{V} & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1 \\ & & u & \longmapsto & [u]_\alpha \end{array} \;;\quad donde \quad [u]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow u = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$$

Es una biyección

Ejemplo 6.1.1. *Si $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$ entonces*

$$c(n) = \{e_2, e_2, \dots, e_n\}$$

La llamaremos la base canónica de $\mathbb{K}^n$, pues;

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \quad \Longleftrightarrow \quad [(x_1, x_2, \dots, x_n)]_{c(n)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.1.2. *Si $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times s)$ entonces*

$$m(n \times s) = \{E_{ij} \mid (1 \leq i \leq n); (1 \leq j \leq s)\}$$

La llamaremos la base canónica de $(\mathbb{M})_{\mathbb{K}}(n \times s)$, pues por ejemplo para $n = s = 2$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} &= x_{11}E_{11} + x_{12}E_{12} + x_{21}E_{21} + x_{22}E_{22} \\ &= x_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.1.3. *Si $\mathbb{V} = \mathbb{K}[x]$ entonces*

$$p(\infty) = \{1, x, x^2, \dots\}$$

La llamaremos la base canónica de los polinomios con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$, pues genéricamente un polinomio se escribe como,

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_t x^t; \quad (t \in \mathbb{N})$$

En particular,

$$p(n) = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}; \quad (n \in \mathbb{N})$$

La llamaremos la base canónica de $\mathbb{K}_n[x]$, el espacio vectorial de polinomios hasta de grado n.

Ejemplo 6.1.4. *En $\mathbb{K}^n$, sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base entonces*

- $c\alpha = \{c \cdot v_1, c \cdot v_2, \dots, c \cdot v_n\}$, *es una nueva base de* $\mathbb{K}^n$, *para cada* $c \in \mathbb{K} - \{0\}$

- $\alpha^+ = \{v_1, v_1 + v_2, \dots, \sum_{i=1}^{n} v_i\}$, *es una nueva base de* $\mathbb{K}^n$

- *En general* $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, *donde* $w_j = \sum_{i=1}^{j} a_i v_i$, *para* $(a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n$ *fijo, es una base de* $\mathbb{K}^n$

Ejemplo 6.1.5. *Sea* $V = \{f : [-\pi, \pi] \longmapsto \mathbb{R} \mid \text{ tal que } f \text{ continua } \}$. *Si definimos el subespacio de* V

$$W = \langle \{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \dots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\} \rangle$$

entonces $\alpha = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \dots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\}$, *es una base de* W, *para cada* $n \in \mathbb{N}$

Teorema 6.2. *Sea* V *un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial y* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *una base de* $\mathbb{V}$ *entonces cualquier subconjunto de* V *que posea más de n-elementos es linealmente dependiente*

En efecto

(1) *Sea* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *una base de* V, *y* $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_s\} \subset \mathbb{V}$, *donde* $n < s$

(2) *Supongamos que* $c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + \cdots + c_s w_s = 0_{\mathbb{V}}$

(3) *Como* α *es una base entonces en primer lugar, cada elemento de* $\mathbb{V}$ *tiene representación como combinación lineal de sus elementos (Es un sistema de generadores). Así que en particular para cada* w_i $(1 \le i \le s)$ *tenemos que*

$$\begin{array}{rcl} w_1 &=& a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ w_2 &=& a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ &\vdots& \\ w_i &=& a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n \\ &\vdots& \\ w_s &=& a_{s1}v_1 + a_{s2}v_2 + \cdots + a_{sn}v_n \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} c_1w_1 &=& c_1a_{11}v_1 + \cdots + c_1a_{1n}v_n \\ c_2w_2 &=& c_2a_{21}v_1 + \cdots + c_2a_{2n}v_n \\ &\vdots& \\ c_iw_i &=& c_ia_{i1}v_1 + \cdots + c_ia_{in}v_n \\ &\vdots& \\ c_sw_s &=& c_sa_{s1}v_1 + \cdots + c_sa_{sn}v_n \\ \hline 0_{\mathbb{V}} &=& \left(\sum_{i=1}^{s} c_i a_{i1}\right) v_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{s} c_i a_{in}\right) v_n \end{array} \quad (+)$$

En segundo lugar, α es linealmente independiente en $\mathbb{V}$, así que, forzosamente debemos tener que

$$\left.\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{i=1}^{s} c_i a_{i1} & = & 0\\ & \vdots & \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s} c_i a_{in} & = & 0\end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \cdots + a_{s1}c_s & = & 0\\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{s2}c_s & = & 0\\ & \vdots & \\ a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \cdots + a_{sn}c_s & = & 0\end{array}\right| \qquad (**)$$

Como $n < s$ entonces el sistema homogéneo $(**)$ tiene infinitas soluciones, es decir, el conjunto β es linealmente dependiente.

Corolario 6.2.1. *Todas las bases de un espacio vectorial tienen la misma cardinalidad, es decir el mismo número de vectores.*

En efecto

Supongamos que $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, v_m\}$ son dos bases del espacio vectorial $\mathbb{V}$. Aplicando el contenido del teorema 6.2 tenemos dos casos simultáneos que analizar,

(1) *Si $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base entonces n es el número máximo de vectores linealmente independientes, así que si β es otra base entonces su número de vectores linealmente independientes m debe ser menor o igual que n*

(2) *Si $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ es una base entonces m es el número máximo de vectores linealmente independientes, así que si α es otra base entonces su número de vectores linealmente independientes n debe ser menor o igual que m.*

(3) *Así que $n = m$, pues ambos son números naturales.*

Definición 6.3. *Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. Llamaremos dimensión de $\mathbb{V}$ sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ a la cardinalidad de una base de $\mathbb{V}$, y la notaremos por $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$*

Ejemplo 6.3.1. *Usando la información acrisolada en los ejemplos, y observaciones anteriores tenemos que:*

(1) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$; *pues* $card(c(n)) = n$

(2) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$; *pues* $card(c(n)) = n$

(3) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$;

(4) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$; *pues* $card(p(n)) = n + 1$

(5) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x]) = \infty$; *pues* $card(p(\infty)) = \infty$

(6) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times s)) = n \cdot s$; *pues* $card(m(n \times s)) = n \cdot s$

Teorema 6.4. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ entonces*

$$\alpha \text{ linealmente independiente } \Longleftrightarrow \alpha \text{ sistema de generadores}$$

En efecto

Etapa 1. $(\Longrightarrow)$. *Por demostrar que [α Li entonces α genera $\mathbb{V}$].*

Del contenido del teorema 6.2 sugue que el conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u\}$ *es linealmente dependiente* $(\forall u; u \in \mathbb{V})$.

Luego, existen escalares $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, *<u>no todos nulos</u> tales que* $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n + a_{n+1}u = 0_{\mathbb{V}}$.

- *Si* $a_{n+1} \neq 0$ *entonces*

$$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n + a_{n+1}u = 0_{\mathbb{V}} &\Longrightarrow a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = a_{n+1}u \\ &\Longrightarrow \frac{a_1}{a_{n+1}}\, v_1 + \frac{a_2}{a_{n+1}}\, v_2 + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}}\, v_n = u \end{aligned}$$

  Así que α *en este caso genera* $\mathbb{V}$

- *Si* $a_{n+1} = 0$ *entonces*

$$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n + a_{n+1}u = 0_{\mathbb{V}} &\Longrightarrow a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0_{\mathbb{V}} \\ &\Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 \quad (\alpha \text{ es } Li) \end{aligned}$$

  Pero entonces contrariamos el hecho de que existen escalares no todos nulos, así que este caso no es posible, para esta dimensión.

Etapa 2. $(\Longleftarrow)$. *Por demostrar que [α genera $\mathbb{V}$] entonces α Li.*

En cualquier caso sólo existen dos posibilidades, que α sea Linealmente independiente o linealmente dependiente.

Pero, si α linealmente dependiente entonces $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) < n$, *lo cual contradice nuestra hipótesis. Así que este caso no es posible.*

Teorema 6.5. *Sea* $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbb{K}^n$, *tal que* $u_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ *entonces α es linealmente independiente si y sólo si*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$$

En efecto

Supongamos que $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n = 0_{\mathbb{V}}$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n = 0_{\mathbb{K}^n} \quad &\Longrightarrow \quad c_1(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) + c_2(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) + \cdots + \\
& \qquad c_n(a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}) = 0_{\mathbb{K}^n} \\
&\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl}
a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \cdots + a_{n1}c_n &=& 0 \\
a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{n2}c_n &=& 0 \\
&\vdots& \\
a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n &=& 0
\end{array}\right| \\
&\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

El sistema $(*)$ *tiene solución única,* $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ *si y sólo si la matriz de coeficientes del sistema homogéneo es invertible. Es decir*

$$
\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^t \neq 0
$$

Conclusión 6.6. *Frente a nuestro objetivo consistente en " determinar rápida y efectivamente a los elementos de un espacio vectorial", podemos decir lo siguiente:*

(1) *Un espacio vectorial hay que entenderlo respecto de una base* ($\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$), *o "sistema de referencia" o "reglas del juego".*

(2) *como* $[\ ]_\alpha$ *es un biyección entonces llamamos coordenadas de* $u \in \mathbb{V}$ *a* $[u]_\alpha \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1)$, *y a este último lo llamamos espacio coordenado.*

(3) *Así que un espacio vectorial puede ser de ahora en adelante, identificado como una estructura híbrida, formada por dos partes equivalentes, pero con funciones diferentes y muy precisas.*

En efecto

$$
\mathbb{V} \leftrightarrow \begin{bmatrix} (\mathbb{V}, \alpha) \\ \\ \downarrow [\ ]_\alpha \\ \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \textit{Teoría:Combinaciones lineales} \\ \\ \downarrow \\ \\ \textit{Práctica: Coordenadas} \end{bmatrix}
$$

(4) *El problema que aparece, y por tanto hay que abordar más adelante es: ¿Cómo se relacionan dos triadas diferentes?. Es decir*

$$\begin{bmatrix} (\mathbb{V},\alpha) \\ \\ \downarrow [\,]_\alpha \\ \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1)\end{bmatrix} \overset{?}{\longmapsto} \begin{bmatrix} (\mathbb{V},\beta) \\ \\ \downarrow [\,]_\beta \\ \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1)\end{bmatrix}$$

6.7. Ejercicios Propuestos de Base.

(1) Determine el conjunto

$$S=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid (-2,b,1)\in\langle\{(a,0,2),(4,a,-2),(-2a,-2,a)\}\rangle\}$$

(2) Determine si los siguientes conjuntos son subespacios en el espacio vectorial correspondiente. En caso afirmativo, determine una base para el subespacio.

(a) $\mathbb{W}=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a^2+b^2-c^2-d^2=0\}$

(b) $\mathbb{W}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid [a=d\wedge b=0\wedge c=2d]\right\}$

(c) $\mathbb{W}=\left\{B\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid B\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot B\right\}$

(3) Sea $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ una base del $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$. Demuestre que

$$\beta=\{w_1,w_2,\dots,w_n\} \text{ tal que } w_i=av_1+v_i \quad (i=1,2,\dots n),(a\in\mathbb{K}) \text{ es una base de } \mathbb{V}$$

(4) Si $\alpha=\left\{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & a\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces determine el conjunto

$$\beta=\{a\in\mathbb{R} \mid \alpha \text{ No es una base de } \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\}$$

(5) Si $\alpha=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

(a) Demuestre que α es una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

(b) Determine $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right]_\alpha$

(6) Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & b \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & c \end{array}\right| \qquad (*)$$

(a) Demuestre que $\mathbb{W}=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid (*) \text{ Tiene solución }\}\le\mathbb{R}^3$

(b) A partir de una base del subespacio $\mathbb{W}$ obtenga una base de $\mathbb{R}^3$

7. Coordenadas y Matrices

El problema que abordaremos es exactamente, ¿Cómo se relacionan dos triadas diferentes?. Es decir ¿Qué relación existe entre los sistemas de gestión de la información determinados por las bases α y β?

En símbolos tenemos

$$\begin{bmatrix} (\mathbb{V},\alpha) \\ \\ \downarrow [\ ]_\alpha \\ \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \end{bmatrix} \stackrel{?}{\longmapsto} \begin{bmatrix} (\mathbb{V},\beta) \\ \\ \downarrow [\ ]_\beta \\ \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \end{bmatrix}$$

Equivalentemente, si $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, para cada $u \in \mathbb{V}$ tendremos que

$$\begin{array}{ccc} u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in \mathbb{V} & \longmapsto & u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i w_i \in \mathbb{V} \\ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \\ [u]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) & \longmapsto & [u]_\alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \end{array} \tag{15}$$

Luego (15), nos sugiere que debemos generar un proceso que transforme coordenadas en la base α en coordenadas en la base β.

7.1. Propuesta de Estrategia. Para analizar esta situación, verificaremos directamente el comportamiento de la función $[]_\gamma$, (donde γ es una base cualquiera del espacio), con respecto a las reglas básicas con que se generan los vectores. Es decir:

(1) Mostraremos que la función $[\ ]_\gamma$, para cualquier base $\gamma = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ de $\mathbb{V}$, respeta las operaciones del espacio $\mathbb{V}$. Es decir que $(\forall u; u \in \mathbb{V})$, $(\forall v; v \in \mathbb{V})$ y $(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{K})$, se verifican:

   (a) $[u+v]_\gamma = [u]_\gamma + [v]_\gamma$
   (b) $[\lambda u]_\gamma = \lambda\,[u]_\gamma$

   En efecto

   Si $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i z_i$ y $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i z_i$ entonces $u + v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (c_i + d_i) z_i$. Así que

$$[u+v]_\gamma = \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \\ \vdots \\ c_n + d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = [u]_\gamma + [v]_\gamma$$

   Análogamente, si $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces $\lambda u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda c_i) z_i$. Por tanto

$$[\lambda u]_\gamma = \begin{pmatrix} \lambda c_1 \\ \lambda c_2 \\ \vdots \\ \lambda c_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \lambda\,[u]_\gamma$$

(2) Siguiendo la idea propuesta por el diagrama (15). Apliquemos la función $[\ ]_\beta$, a los elementos de la base α. Es decir

$$v_s = a_{1s}w_1 + a_{2s}w_2 + a_{3s}w_3 + \cdots + a_{ns}w_n = \sum_{i=1}^{n} a_{is}w_i \iff [v_s]_\beta = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \qquad (1 \leq s \leq n)$$

(3) Ahora usemos la información acopiada, en el caso general, es decir si $u \in \mathbb{V}$ y $u = \sum_{s=1}^{n} c_s v_s$ entonces

$$\begin{aligned} [u]_\beta &= \left[\sum_{s=1}^{n} c_s v_s\right]_\beta = \sum_{s=1}^{n} c_s [v_s]_\beta = \sum_{s=1}^{n} c_s \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1a_{11} + c_2a_{12} + \cdots + c_na_{1n} \\ c_1a_{21} + c_2a_{22} + \cdots + c_na_{2n} \\ \vdots \\ c_1a_{n1} + c_2a_{n2} + \cdots + c_na_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \underbrace{a_{n1}}_{[v_1]_\beta} & \underbrace{a_{n2}}_{[v_2]_\beta} & \cdots & \underbrace{a_{nn}}_{[v_n]_\beta} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{[u]_\alpha} \end{aligned}$$

(4) Ya henos encontrado la relación, como era de esperar una matriz, que traslada la información de una base a otra, así sólo resta que la denotemos formalmente, porque incluso ya sabemos como determinarla.

Definición 7.2. *La matriz de orden n, $[I]_\alpha^\beta = ([v_1]_\beta\ [v_2]_\beta \dots [v_n]_\beta)$, se llamará la matriz cambio de base de α para β*

Equivalentemente,

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Además hemos mostrado el siguiente importante resultado

Teorema 7.3. *Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n, $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ son dos bases entonces*

$$[I]_\alpha^\beta [u]_\alpha = [u]_\beta \qquad (\forall u; u \in \mathbb{V}) \tag{16}$$

Corolario 7.3.1. *Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n, $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ son dos bases entonces $[I]_\alpha^\beta \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_\mathbb{K}(n))$ e $\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} = [I]_\beta^\alpha$*

En efecto

En primer lugar, $(\forall u; u \in \mathbb{V})$ tenemos que:

$$\left([I]_\alpha^\beta [I]_\beta^\alpha\right) [u]_\beta = [I]_\alpha^\beta \left([I]_\beta^\alpha [u]_\beta\right) = [I]_\alpha^\beta [u]_\alpha = [u]_\beta$$

Y en segundo lugar,

$$\left([I]_\beta^\alpha\,[I]_\alpha^\beta\right)[u]_\alpha = [I]_\beta^\alpha\left([I]_\alpha^\beta\,[u]_\alpha\right) = [I]_\beta^\alpha\,[u]_\beta = [u]_\alpha$$

Así que, $[I]_\alpha^\beta \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_\mathbb{K}(n))$ e $\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} = [I]_\beta^\alpha$

Conclusión 7.3.2. *Lo anterior puede ser sistematizado a través del siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd}
u = \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i v_i \in \arrow[d] & (\mathbb{V},\alpha) \arrow[r, "1_\mathbb{V}"] \arrow[d, "{[\;]_\alpha}"] & (\mathbb{V},\beta) \arrow[d, "{[\;]_\beta)}"] & \ni u = \displaystyle\sum_{i=1}^n d_i w_i \arrow[d] \\
{[u]_\alpha} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in & \mathbb{M}_\mathbb{R}(n\times 1) \arrow[r, "{[I]_\alpha^\beta}"'] & \mathbb{M}_\mathbb{R}(n\times 1) & \ni \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = [u]_\beta
\end{tikzcd}$$

7.4. Ejercicios Propuestos de Coordenadas.

(1) Si $\alpha = \{x, 3+x^2, x+2x^2\} \subset \mathbb{R}_2 x$ y $\beta = \{x+3, x-2, x^2+1\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ entonces

(a) Demuestre que α y β son dos bases de $\mathbb{R}^3$

(b) Determine

(i) $[6-4x+8x^2]_\alpha \ \wedge \ [6-4x+8x^2]_\beta$

(ii) $[9-x+7x^2\ ]_\beta \ \wedge \ [9-x+7x^2]_\alpha$

(iii) $[I]_\alpha^\beta$ y $[I]_\beta^\alpha$

(c) Muestre que

(i) $[I]_\alpha^\beta[6-4x+8x^2]_\alpha = [6-4x+8x^2]_\beta$

(ii) $[I]_\beta^\alpha[9-x+7x^2\ ]_\beta = [9-x+7x^2\ ]_\alpha$

(2) Sea $\beta = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_\mathbb{R}(3)$. Determine, si es posible, una base α del tal forma que $A = [I]_\alpha^\beta$. Si es posible exhiba una tal base α, si no justifique con precisión meridiana su respuesta.

8. Situaciones de Desempeño: Espacios Vectoriales

8.1. El objetivo de esta sección es presentar al Estudiante "Situaciones Problemáticas" que le permitan:

(♣) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.

(♣) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.

(♣) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos.

(♣) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.

(♣) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y "en lo posible haber aprehendido" de los tópicos analizados.

8.2. Algunas sugerencias para enfrentar las situaciones problemáticas son las siguientes:

($\star$) Lea cuidadosamente el problema.

($\star$) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.

($\star$) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos matemáticos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!!! Este acto nunca esta de más.

($\star$) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

8.3. Situaciones de Desempeño Propuestas:

(1) Demuestre que $W = \left\{ p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}_n[x] \mid \sum_{i=0}^{n} i a_i = 0 \right\} \leq \mathbb{R}_n[x]$

(2) Sea $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid p(1) = 0\}$. Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_2[x]$

(3) Sean $\mathbb{W}_1 = \{(x, y, z) \ / \ 2x - y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{W}_2 = \{(x, y, z) \ / \ x + 2y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

  (a) Demuestre que $\mathbb{W}_i \leq \mathbb{R}^3$ para $(i = 1, 2)$

  (b) Demuestre que $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{R}^3$

  (c) ¿ Es $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{R}^3$?

(4) Sea $\mathbb{W}_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid a_{11} + a_{22} = 0 \right\} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

  (a) Demuestre que $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

  (b) Determine $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$

(5) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z = 0\}$.

  (a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^4$

  (b) Determine una base de $\mathbb{W}$

(6) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Si $\beta = \{w_1, \dots, w_n\} \subset V$ tal que $w_k = \sum_{i=1}^{k} iv_i$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$ entonces demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$$

(7) Sea $C[-\pi, \pi] = \{f : [-\pi, \pi] \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ Derivable en el intervalo } [-\pi, \pi]\}$. Demuestre que $\alpha = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$ es un conjunto linealmente independiente en $C[-\pi, \pi]$

Recuerde que $C[-\pi, \pi]$ es un espacio vectorial con las operaciones:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para $x \in C[-\pi, \pi]$,
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in C[-\pi, \pi]$

(8) Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Demuestre que

$$\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \text{ tal que } u_s = \sum_{r=1}^{s} v_r \quad (\text{para } 1 \leq s \leq n) \text{ es un sistema de generadores de } \mathbb{V}$$

(9) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto Li en el $\mathbb{R}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$. ¿Es $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ un conjunto LI en $\mathbb{V}$?. Si $w_i = av_1 + v_i$, para $(i = 1, 2, \dots n)$ y $a \neq -1$ es un escalar fijo.

(10) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\alpha \text{ base de } \mathbb{V} \implies \beta = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\} \text{ es una base de } \mathbb{V}, \text{ donde } w_i = \sum_{j=1}^{i} v_j \quad (1 \leq i \leq n)$$

(11) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base del espacio vectorial real $\mathbb{V}$. Define el conjunto $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ tal que $w_j = \sum_{i=1}^{j} 2v_i$, para $1 \leq j \leq n$. Demuestre que β es también una base de $\mathbb{V}$.

(12) Sea $\beta = \{1, 1 - x, 1 - x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$, y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Determine, si es posible, una base α de $\mathbb{R}_2[x]$ del tal forma que $A = [I]_{\alpha}^{\beta}$. (Si es posible exhiba una tal base α, si no justifique con precisión meridiana su respuesta)

(13) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$. Considere $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ y $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbb{V}$ tal que $u_s = \sum_{i=1}^{s} v_{s+1-i}$, para $s = 1, 2, \dots n$.

  (a) Demuestre que α base de $\mathbb{V} \implies \beta$ base de $\mathbb{V}$

(b) Determine $[I]_{\beta}^{\alpha}$

(14) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Si $[I]_{c(3)}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ entonces determine la base α

(15) En $\mathbb{R}_2[x]$, considere las bases $\alpha = \{x, x^2+3, 2x^2+x\}$ y $\beta = \{x+3, x-2, x^2+1\}$.

(a) Determine $[I]_{\alpha}^{\beta}$ y $[I]_{\beta}^{\alpha}$

(b) Determine $[1+x+x^2]_{\alpha}$ y $[1+x+x^2]_{\beta}$

(16) Considere las bases $\alpha = \{(1,-2,0), (0,1,0), (1,0,1)\}$ y $\beta = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Determine $[I]_{\alpha}^{\beta}$ e $[I]_{\beta}^{\alpha}$

(17) Si $P(2) = \{1, x, x^2\}$ y $\alpha = \{1+x+x^2, -2-x+x^2, -1+x+x^2\}$ dos bases de $\mathbb{R}_2[x]$ entonces determine $[I]_{\alpha}^{P(2)}$ e $[I]_{P(2)}^{\alpha}$

(18) Si α y $\beta = \{(1,0,1), (-1,1,0), (0,0,1)\}$ son dos bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es la matriz de cambio de la baseα para la base β entonces determine la base α.

(19) Si $\alpha = \{(2,1,2), (4,-1,0), (1,2,2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, y $u = (1,2,3)$ entonces determine $[u]_{\alpha}$

9. Solución de Situaciones de Desempeño: Espacios Vectoriales

(1) Demuestre que $\mathbb{W}=\left\{p(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{R}_n[x]\mid \sum\limits_{i=0}^{n}ia_i=0\right\}\le\mathbb{R}_n[x]$.

Solución

$$\begin{aligned}
p(x)\in W &\iff p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{R}_n[x]\ \wedge\ \sum_{i=0}^{n}ia_i=0\\
&\iff p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{R}_n[x]\ \wedge\ \sum_{i=1}^{n}ia_i=0\\
&\iff p(x)=a_0+a_1x+\sum_{i=2}^{n}a_ix^i\ \wedge\ a_1=-\sum_{i=2}^{n}ia_i\\
&\iff p(x)=a_0+\left(-\sum_{i=2}^{n}ia_i\right)x+\sum_{i=2}^{n}a_ix^i \qquad (*)
\end{aligned}$$

Ahora, procedemos a estudiar la relación polinomial expresada en $*$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n}a_ix^i+\left(-\sum_{i=2}^{n}ia_i\right)x &= (a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n)-(2a_2x+3a_3x+\cdots+na_nx)\\
&= a_2(x^2-2x)+a_3(x^3-3x)+a_4(x^4-4x)+\cdots+a_n(x^n-nx) \qquad (**)
\end{aligned}$$

Retornamos a $(*)$ a la luz de lo obtenido en $(**)$ y nos resulta que

$$\begin{aligned}
p(x)\in W &\iff p(x)=a_0+a_2(x^2-2x)+a_3(x^3-3x)+a_4(x^4-4x)+\cdots+a_n(x^n-nx)\\
&\iff p(x)\in\langle\{1,(x^2-2x),(x^3-3x),(x^4-4x),\dots,(x^n-nx)\rangle
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \langle\{1,(x^2-2x),(x^3-3x),(x^4-4x),\dots,(x^n-nx)\rangle\Longrightarrow\mathbb{W}\le\mathbb{R}_n[x]$$

(2) Sea $\mathbb{W}=\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\mid p(1)=0\}$. Demuestre que $\mathbb{W}\le\mathbb{R}_2[x]$

Solución

Etapa 1. $p(x)=0+0x+0x^2\in\mathbb{R}_2[x]$ y $p(1)=0+0\cdot 1+0\cdot 1^2=0$.

Luego $(0)\in\mathbb{W}$ y $\mathbb{W}\neq\emptyset$.

Etapa 2. Sean $p(x)\in\mathbb{W}$ y $q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{W}$ entonces

$$\begin{aligned}
p(x)\in\mathbb{W} &\iff p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge p(1)=0\\
&\iff p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge\iff a_0+a_1+a_2=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(x)\in\mathbb{W} &\iff q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge q(1)=0\\
&\iff q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge b_0+b_1+b_2=0
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} p(x)+q(x) &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \quad \text{y} \\ p(1)+q(1) &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)\cdot 1+(a_2+b_2)\cdot 1^2 \\ &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)+(a_2+b_2) \\ &= (a_0+a_1+a_2)+(b_0+b_1+b_2) \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $p(x)+q(x) \in \mathbb{W}$.

Etapa 3. Sean $p(x) \in \mathbb{W}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} \lambda p(x) &= \lambda a_0+\lambda a_1 x+\lambda a_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \quad \text{y} \\ \lambda p(1) &= \lambda a_0+\lambda a_1\cdot 1+\lambda a_2\cdot 1^2 \\ &= \lambda a_0+\lambda a_1+\lambda a_2 \\ &= \lambda(a_0+a_1+a_2) \\ &= \lambda\cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $\lambda p(x) \in \mathbb{W}$, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_2[x]$

(3) Sean $\mathbb{W}_1 = \{(x,y,z) \ / \ 2x-y-z=0\} \subset \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{W}_2 = \{(x,y,z) \ / \ x+2y+3z=0\} \subset \mathbb{R}^3$.

(a) Demuestre que $\mathbb{W}_i \leq \mathbb{R}^3$ para $(i=1,2)$

Solución

Etapa 1. $\mathbb{W}_1 \neq \emptyset$, pues $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ y $2\cdot 0-0-0=0$. Así que $(0,0,0) \in \mathbb{W}_1$

Etapa 2. Sea $u \in \mathbb{W}_1$ y $v \in \mathbb{W}_1$ entonces

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W}_1 &\iff u=(x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3 \wedge 2x_1-y_1-z_1=0 \\ v \in \mathbb{W}_1 &\iff v=(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3 \wedge 2x_2-y_2-z_2=0 \end{aligned}$$

entonces

$$u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} 2(x_1+x_2)-(y_1+y_2)-(z_1+z_2) &= 2x_1+2x_2-y_1-y_2-z_1-z_2 \\ &= (2x_1-y_1-z_1)+(2x_2-y_2-z_2) \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $u+v \in \mathbb{W}_1$

Etapa 3. Sea $u \in \mathbb{W}_1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned}(2\lambda x_1 - \lambda y_1 - \lambda z_1) &= \lambda(2x_1 - y_1 - z_1)\\ &= \lambda \cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Luego, $\lambda u \in \mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{R}^3$

Análogamente, para $\mathbb{W}_2$ tenemos que

Etapa 1. $\mathbb{W}_2 \neq \emptyset$, pues $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ y $2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$. Así que $(0,0,0) \in \mathbb{W}_2$

Etapa 2. Sea $u \in \mathbb{W}_2$ y $v \in \mathbb{W}_2$ entonces

$$u \in \mathbb{W}_2 \iff u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 \wedge x_1 + 2y_1 + 3z_1 = 0$$

$$v \in \mathbb{W}_2 \iff v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \wedge x_2 + 2y_2 + 3z_2 = 0$$

entonces

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) &= x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 + 3z_1 + 3z_2\\ &= (x_1 + 2y_1 + 3z_1) + (x_2 + 2y_2 + 3z_2)\\ &= 0 + 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Luego, $u + v \in \mathbb{W}_2$

Etapa 3. Sea $u \in \mathbb{W}_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned}(\lambda x_1 + 2\lambda y_1 + 3\lambda z_1) &= \lambda(x_1 + 2y_1 + 3z_1)\\ &= \lambda \cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Luego, $\lambda u \in \mathbb{W}_2$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{R}^3$

(b) Demuestre que $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{R}^3$

Solución

Etapa 1. $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 \neq \emptyset$, pues del ejercicio anterior, $(0,0,0) \in \mathbb{W}_1$ y $(0,0,0) \in \mathbb{W}_2$
Etapa 2. Sea $u \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ y $v \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ entonces

$$
\begin{aligned}
u \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 &\iff u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 \wedge u \in \mathbb{W}_1 \wedge u \in \mathbb{W}_2 \\
&\iff u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 \wedge 2x_1 - y_1 - z_1 = 0 \wedge x_1 + 2y_1 + 3z_1 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 &\iff v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \wedge v \in \mathbb{W}_1 \wedge v \in \mathbb{W}_2 \\
&\iff u = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \wedge 2x_2 - y_2 - z_2 = 0 \wedge x_2 + 2y_2 + 3z_2 = 0
\end{aligned}
$$

entonces

$$u + v \;=\; (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y}$$

Como $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{R}^3$ entonces $u + v \in \mathbb{W}_1$ y $u + v \in \mathbb{W}_2$. Así que $u + v \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$
Etapa 3. De la misma forma si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ entonces $\lambda u \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, y $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{R}^3$

(c) ¿ Es $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{R}^3$?

Solución

Observen que $u = (1, 2, 0) \in \mathbb{W}_1$ y $v = (-1, -1, 1) \in \mathbb{W}_2$, pero $u + v = (0, 1, 1) \notin \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$. Así que $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2 \not\leq \mathbb{R}^3$

(4) Sea $\mathbb{W}_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid a_{11} + a_{22} = 0 \right\} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

(a) Demuestre que $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

Solución

$$
\begin{aligned}
A \in \mathbb{W}_1 &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a_{11} + a_{22} = 0 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a_{22} = -a_{11} \\
&\iff A = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego, $\mathbb{W}_1 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

(b) Determine $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$

Solución

Etapa 1. Sea $\mathbb{W}_2$ el subespacio de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ pedido.

Etapa 2. $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2 \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}_1) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}_2)$

Luego, $4 = 3 + \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}_2)$, y $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}_2) = 1$

Etapa 3. Basta escoger $\mathbb{W}_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, pues:

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ es una base de } \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

(5) Sea $\mathbb{W} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z = 0\}$.

(a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^4$

Solución

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} \quad &\Longleftrightarrow \quad u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x + 2y - 3z = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x = -2y + 3z = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad u = (-2y + 3z, y, z, t) \ \wedge \ (y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \\ &\Longleftrightarrow \quad u = y(-2,1,0,0) + z(3,01,0) + t(0,0,0,1) \end{aligned}$$

Luego $\mathbb{W} = \langle \{(-2,1,0,0), (3,0,1,0), (0,0,0,1)\} \rangle \leq \mathbb{R}^4$

(b) Determine una base de $\mathbb{W}$

Solución

Si $\alpha = \{(-2,1,0,0), (3,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ entonces α genera $\mathbb{W}$ y para ver que es Li hacemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} a_1(-2,1,0,0) + a_2(3,01,0) + a_3(0,0,0,1) &= (0,0,0,0) \\ &\Downarrow \\ (-2a_1 + 3a_2, a_1, a_2, a_3) &= (0,0,0,0) \\ &\Downarrow \\ a_1 = a_2 &= a_3 = 0 \end{aligned}$$

Así que α es una base $\mathbb{W}$

(6) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Si $\beta = \{w_1, \dots, w_n\} \subset V$ tal que $w_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} i v_i$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$ entonces demuestre que

$$\langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle = \langle \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \rangle$$

Solución

Etapa1. Debemos demostrar que $\langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle = \langle \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \rangle$. Es decir debemos mostrar que $\langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle \subset \langle \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \rangle$ y $\langle \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \rangle \subset \langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle$

Etapa 2. Gestión de la información

(a) En primer lugar, sabemos que

$$u \in \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle \iff u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad (a_i \in \mathbb{K} : 1 \leq i \leq n)$$
$$v \in \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \iff v = \sum_{i=1}^{n} b_i w_i \quad (b_i \in \mathbb{K} : 1 \leq i \leq n)$$

(b) En segundo lugar,

$$w_k = \sum_{i=1}^{k} i v_i;\ (k = 1, 2, \dots, n) \Longrightarrow \begin{array}{rcl} w_1 & = & v_1 \\ w_2 & = & v_1 + 2v_2 \\ w_3 & = & v_1 + 2v_2 + 3v_3 \\ & \vdots & \\ w_n & = & v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \cdots + nv_n \end{array}$$

Luego,

$$\langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \subset \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle$$

(c) En tercer y último lugar,

$$\left.\begin{array}{rcl} w_1 & = & v_1 \\ w_2 & = & v_1 + 2v_2 \\ w_3 & = & v_1 + 2v_2 + 3v_3 \\ & \vdots & \\ w_n & = & v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \cdots + nv_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} v_1 & = & w_1 \\ v_2 & = & \dfrac{w_2 - w_1}{2} \\ v_3 & = & \dfrac{w_3 - w_2}{3} \\ & \vdots & \\ v_n & = & \dfrac{w_n - w_{n-1}}{n} \end{array}$$

Luego

$$\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle \subset \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$$

(7) Sea $C[-\pi, \pi] = \{f : [-\pi, \pi] \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ Derivable en el intervalo } [-\pi, \pi]\}$. Demuestre que $\alpha = \{1, \text{sen } x, \cos x\}$ es un conjunto linealmente independiente en $C[-\pi, \pi]$
Recuerde que $C[-\pi, \pi]$ es un espacio vectorial con las operaciones:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para $x \in C[-\pi, \pi]$,
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in C[-\pi, \pi]$.

Solución

Supongamos que tenemos la combinación lineal nula. $a_1 \cdot 1 + a_2 \text{sen } x + a_3 \cos x = 0$ entonces derivando respecto de x obtenemos el sistema lineal en las variables $1, \text{sen } x, \cos x$.

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1 \cdot 1 + a_2 \text{sen } x + a_3 \cos x & = & 0 \\ 0 \cdot 1 + a_2 \cos x - a_3 \text{sen } x & = & 0 \\ 0 \cdot 1 - a_2 \text{sen } x - a_3 \cos x & = & 0 \end{array}\right| \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 \\ \text{sen } x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces escalonando tenemos que:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & -a_3 & a_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2a_3 & a_3^2 \\ 0 & -a_3a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2a_3 & a_3^2 \\ 0 & 0 & a_2^2+a_3^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Caso contrario el sistema homogéneo tiene rango máximo y entonces solución única, es decir $1 = 0$, $\operatorname{sen} x = 0$ y $\cos x = 0$ $(\forall x)$, lo cual es imposible. Por tanto α es Linealmente independiente.

(8) Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Demuestre que

$$\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \text{ tal que } u_s = \sum_{r=1}^{s} v_r \quad (\text{para } 1 \leq s \leq n) \text{ es un sistema de generadores de } \mathbb{V}.$$

Solución

Sea $w \in \mathbb{V}$ entonces como α es una base de $\mathbb{V}$ existen únicos escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ tales que

$$w = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \qquad (*)$$

Pero,

$$\begin{array}{rcl} u_1 = v_1 & \Longleftrightarrow & v_1 = u_1 \\ u_2 = v_1 + v_2 & \Longleftrightarrow & v_2 = u_2 - u_1 \\ u_3 = v_1 + v_2 + v_3 & \Longleftrightarrow & v_3 = u_3 - u_2 \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Sustituyendo en $(*)$ tenemos que

$$\begin{aligned} w &= a_1u_1 + a_2(u_2 - u_1) + a_3(u_3 - u_2) + \cdots + a_n(u_n - u_{n-1}) \\ &= (a_1 - a_2)u_1 + (a_2 - a_3)u_2 + \cdots + a_nu_n \end{aligned}$$

Luego β genera $\mathbb{V}$.

(9) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto Li en el $\mathbb{R}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$. ¿Es $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ un conjunto LI en $\mathbb{V}$?. Si $w_i = av_1 + v_i$, para $(i = 1, 2, \dots n)$ y $a \neq -1$ es un escalar fijo.

Solución

Sabemos que, $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto Li en el $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$, lo que operacionalmente se traduce en que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0_{\mathbb{V}} \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

En este orden de razonamiento, para verificar la calidad de dependencia o independencia lineal de β debemos mostrar que

$$c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n = 0_{\mathbb{V}} \implies c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

En efecto, como $w_i = av_1 + v_i$, para $(i = 1, 2, \dots n)$ y a es un escalar fijo entonces

$$\begin{aligned}
c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n = 0_{\mathbb{V}} &\Longrightarrow c_1(av_1 + v_1) + c_2(av_1 + v_2) + c_3(av_1 + v_3) + \cdots + c_n(av_1 + v_n) = 0_{\mathbb{V}} \\
&\Longrightarrow [a(c_1 + c_2 + \cdots + c_n) + c_1]v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0_{\mathbb{V}} \\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} a(c_1 + c_2 + \cdots + c_n) + c_1 &=& 0 \\ c_2 &=& 0 \\ c_3 &=& 0 \\ \vdots &=& \vdots \\ c_n &=& 0 \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow ac_1 + c_1 = 0 \quad \wedge \quad c_2 = \cdots = c_n = 0 \\
&\Longrightarrow (a + 1)c_1 = 0 \quad \wedge \quad c_2 = \cdots = c_n = 0 \\
&\Longrightarrow (a + 1) = 0 \vee c_1 = 0 \quad \wedge \quad c_2 = \cdots = c_n = 0 \\
&\Longrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0 \quad (a \neq -1)
\end{aligned}$$

Así β es Linealmente independiente en $\mathbb{V}$

(10) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\alpha \text{ base de } \mathbb{V} \quad \Longrightarrow \quad \beta = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\} \text{ es una base de } \mathbb{V}, \text{ donde } w_i = \sum_{j=1}^{i} v_j \quad (1 \leq i \leq n)$$

Solución

- Sea $u \in \mathbb{V}$ entonces como α es una base de $\mathbb{V}$ existen únicos escalares, $a_1, a_2, \dots, a_n$ tales que

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \tag{17}$$

- Ahora por la forma de los elementos de β tenemos que $v_1 = w_1$ y para $i = 2, 3, \dots, n$ tenemos que

$$w_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} v_j \wedge w_i = \sum_{j=1}^{i} v_j \quad \Longrightarrow \quad w_i - w_{i-1} = v_i \tag{18}$$

- Sustituyendo (18) en (17) tenemos que

$$\begin{aligned}
u &= a_1w_1 + a_2(w_2 - w_1) + a_3(w_3 - w_2) + \cdots + a_n(w_n - w_{n-1}) \\
&= (a_1 - a_2)w_1 + (a_2 - a_3)w_2 + (a_3 - a_4)w_3 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)w_{n-1} + a_nw_n
\end{aligned}$$

Luego, β genera $\mathbb{V}$

- Supongamos que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j w_j = 0_{\mathbb{V}}$ entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n} c_s w_s = 0_{\mathbb{V}} \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{s=1}^{n} c_s \left(\sum_{j=1}^{s} v_j\right) = 0_{\mathbb{V}} \\
&\Longrightarrow \quad c_1 \left(\sum_{j=1}^{1} v_j\right) + c_2 \left(\sum_{j=1}^{2} v_j\right) + \cdots + c_n \left(\sum_{j=1}^{n} v_j\right) = 0_{\mathbb{V}} \\
&\Longrightarrow \quad (c_1 + c_2 + \cdots c_n)v_1 + (c_2 + \cdots c_n)v_2 + \cdots + (c_{n-1} + c_n)v_{n-1} + c_n v_n = 0_{\mathbb{V}} \\
&\overset{\alpha \text{ es Li}}{\Longrightarrow} \quad \left.\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 + \cdots c_n &=& 0 \\ c_2 + \cdots c_n &=& 0 \\ \vdots &=& \vdots \\ c_{n-1} + c_n &=& 0 \\ c_n &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned}
$$

Así que β es linealmente independiente y por tanto es una base.

(11) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base del espacio vectorial real $\mathbb{V}$. Define el conjunto $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ tal que $w_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} 2v_i$, para $1 \leq j \leq n$. Demuestre que β es también una base de $\mathbb{V}$.

Solución

$$
a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n = 0_{\mathbb{V}} \quad \Longrightarrow \quad 2(a_1 + \cdots + a_n)v_1 + 2(a_2 + \cdots + a_n)v_2 + \cdots + a_n v_n = 0_{\mathbb{V}}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &=& 0 \\ a_2 + \cdots + a_n &=& 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + a_n &=& 0 \\ a_n &=& 0 \end{array}\right| \quad (\text{ Pues } \alpha \text{ es Li}) \\
&\Longrightarrow \quad a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 0 \quad \text{y entonces } \beta \text{ es Li}
\end{aligned}
$$

Para mostrar que es un sistema de generadores, hacemos lo siguiente:

Si $u \in \mathbb{V}$ entonces como α es base existen únicos escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tal que

$$
\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \tag{19}
$$

Ahora β genera el espacio $\mathbb{V}$ si tiene solución la ecuación: $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i w_i$. Pero,

$$u=\sum_{j=1}^{n} b_j w_j \implies u=\sum_{j=1}^{n} b_j\left(\sum_{i=1}^{j} 2v_i\right)$$
$$\implies u=\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)v_1+\left(\sum_{j=2}^{n} b_j\right)v_2+\cdots+\left(\sum_{j=n-1}^{n} b_j\right)v_{n-1}+\left(\sum_{j=n}^{n} b_j\right)v_n$$

Como la representación (19) es única para u entonces debe suceder que:

$$\begin{array}{rcl|} b_1+b_2+\cdots+b_n &=& a_1\\ b_2+\cdots+b_n &=& a_2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n-1}+b_n &=& a_{n-1}\\ b_n &=& a_n\\ \hline \end{array} \quad \text{y luego,} \quad \begin{array}{lcl} b_1 &=& a_1-a_2\\ b_2 &=& a_2-a_3\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n-1} &=& a_{n-1}-a_n\\ b_n &=& a_n \end{array}$$

Así que

$$u=\underbrace{(a_1-a_2)}_{b_1}w_1+\underbrace{(a_2-a_3)}_{b_2}w_2+\cdots+\underbrace{(a_{n-1}-a_n)}_{b_{n-1}}w_{n-1}+\underbrace{a_n}_{b_n}w_n$$

Por tanto genera $\mathbb{V}$, y entonces es una base.

(12) Sea $\beta=\{1,1-x,1-x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$, y $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&1\\2&-2&4\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Determine, si es posible, una base α de $\mathbb{R}_2[x]$ del tal forma que $A=[I]_\alpha^\beta$. Si es posible exhiba una tal base α, si no justifique con precisión meridiana su respuesta.
Solución

Supongamos que $\alpha=\{p_1(x),p_2(x),_3(x)\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, que satisface las condiciones propuestas en el problema encima entonces por definición

$$[I]_\alpha^\beta=\left([p_1(x)]_\beta \quad [p_2(x)]_\beta \quad [p_3(x)]_\beta\right)=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&1\\2&-2&4\end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$[p_1(x)]_\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \implies p_1(x)=1+3(1-x)+2(1-x^2)=6-3x-2x^2$$

$$[p_2(x)]_\beta=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix} \implies p_2(x)=-1+0(1-x)-2(1-x^2)=-3+2x^2$$

$$[p_3(x)]_\beta=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} \implies p_3(x)=2+1(1-x)+4(1-x^2)=7-x-4x^2$$

Entonces

$$\alpha = \{6-3x-2x^2,-3+2x^2,7-x-4x^2\}$$

Pero se debe observar que α no es base, pues es linealmente dependiente por un cálculo directo, o porque

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0$$

. Luego, A no puede ser una matriz cambio de base

(13) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})=n$, Considere los conjuntos $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subset\mathbb{V}$ y $\beta=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}\subset\mathbb{V}$ tal que $u_s=\displaystyle\sum_{i=1}^{s}v_{s+1-i}$, para $s=1,2,\dots n$.

(a) Demuestre que α base de $\mathbb{V}\Longrightarrow\beta$ base de $\mathbb{V}$

Solución

En primer lugar observamos que los elementos de la base β son de la forma:

$$\begin{array}{rclclcrcl}
u_1 &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{1}v_{1+1-i} &=& v_1 & \Longleftrightarrow & v_1 &=& u_1\\
u_2 &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{2}v_{2+1-i} &=& v_2+v_1 & \Longleftrightarrow & v_2 &=& u_2-u_1\\
u_3 &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{3}v_{3+1-i} &=& v_3+v_2+v_1 & \Longleftrightarrow & v_3 &=& u_3-u_2\\
 &\vdots& &\vdots& & & \vdots & & \vdots\\
u_j &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{j}v_{j+1-i} &=& v_j+v_{j-1}+\cdots+v_1 & \Longleftrightarrow & v_j &=& u_j-u_{j-1}\\
 &\vdots& &\vdots& & & \vdots & & \vdots\\
u_n &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{n}v_{n+1-i} &=& v_n+v_{n-1}+\cdots+v_1 & \Longleftrightarrow & v_n &=& u_n-u_{n-1}
\end{array}\tag{20}$$

En segundo lugar, mostramos que β linealmente independiente.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}a_ju_j=0 &\iff a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n=0\\
&\iff a_1v_1+a_2(v_2+v_1)+\cdots+a_n(v_n+v_{n-1}+\cdots+v_1)=0\\
&\iff (a_1+a_2+\cdots+a_n)v_1+(a_2+a_3+\cdots+a_n)v_2+\cdots+(a_{n-1}+a_n)v_{n-1}+a_nv_n=0\\
&\iff \left.\begin{array}{rcl} a_1+a_2+\cdots+a_n &=& 0\\ a_2+\cdots+a_n &=& 0\\ &\vdots& \\ a_{n-1}+a_n &=& 0\\ a_n &=& 0\end{array}\right| \Longrightarrow a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=0
\end{aligned}$$

Así que β es linealmente independiente.

En tercer lugar, mostramos que β es un sistema de generadores.

Si $u\in\mathbb{V}$ entonces como α es una base entonces existen únicos escalares $c_1,c_2,\cdots,c_n$ tales que $u=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n$, pero de acuerdo con (20) tenemos que

$$\begin{aligned} u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \quad &\Rightarrow \quad u = a_1u_1 + a_2(u_2 - u_1) + \cdots + a_n(u_n - u_{n-1}) \\ &\Rightarrow \quad u = (a_1 - a_2)u_1 + (a_2 - a_3)u_2 + \cdots + (a_{n-1} + a_n)a_{n-1} + a_nu_n \end{aligned}$$

Luego β genera $\mathbb{V}$, y por ende es una base de β.

(b) Determine $[I]_\beta^\alpha$

Solución

$$\begin{aligned} [I]_\beta^\alpha &= ([u_1]_\alpha \, [u_2]_\alpha \, [u_2]_\alpha \cdots [u_n]_\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \cdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(14) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Si $[I]_{c(3)}^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ entonces determine la base α

Solución

$$[I]_{c(3)}^\alpha = ([(1,0,0)]_\alpha \, [(0,1,0)]_\alpha \, [(0,0,1)]_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que

$$[(1,0,0)]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (1,0,0) = v_1 + v_2$$

$$[(0,1,0)]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \iff (0,1,0) = v_1 + 3v_2 + 4v_3$$

$$[(0,0,1)]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \iff (0,0,1) = 4v_2 + v_3$$

Por tanto, tenemos un sistema que resuelve el problema.

$$\begin{array}{lcl|} v_1+v_2 & = & (1,0,0)\\ v_1+3v_2+4v_3 & = & (0,1,0)\\ 4v_2+v_3 & = & (0,0,1) \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lcl|} 2v_2+4v_3 & = & (-1,1,0)\\ 4v_2+v_3 & = & (0,0,1)\\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{lcl|} 4v_2+8v_3 & = & (-2,2,0)\\ 4v_2+v_3 & = & (0,0,1)\\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow v_3=\left(-\frac{2}{7},\frac{2}{7},-\frac{1}{7}\right)\wedge v_2=\left(\frac{1}{14},-\frac{1}{14},-\frac{4}{14}\right)\wedge$$
$$v_1=\left(\frac{13}{14},\frac{1}{14},-\frac{4}{14}\right)$$

(15) En $\mathbb{R}_2[x]$, considere las bases $\alpha=\{x,x^2+3,2x^2+x\}$ y $\beta=\{x+3,x-2,x^2+1\}$.

(a) Determine $[I]_\alpha^\beta$ y $[I]_\beta^\alpha$

Solución

Etapa 1. Por definición la matriz $[I]_\alpha^\beta$ se construye como: $[I]_\alpha^\beta=\big([x]_\beta\ [x^2+3]_\beta\ [2x^2+x]_\beta\big)$

Etapa 2. Luego, una buena estrategia es calcular en general: $[a_0+a_1x+a_2x^2]_\beta$. Así que

$$[a_0+a_1x+a_2x^2]_\beta=\begin{pmatrix} b_0\\ b_1\\ b_2\end{pmatrix} \iff a_0+a_1x+a_2x^2=b_0(x+3)+b_1(x-2)+b_2(x^2+1)$$
$$\iff a_0+a_1x+a_2x^2=(3b_0-2b_1+b_2)+(b_0+b_1)x+b_2x^2$$
$$\iff \begin{array}{lcl|} 3b_0-2b_1+b_2 & = & a_0\\ b_0+b_1 & = & a_1\\ b_2 & = & a_2\\ \hline \end{array}$$
$$\Longrightarrow \begin{array}{|lcl|} \hline 3b_0-2b_1 & = & a_0-a_2\\ b_0+b_1 & = & a_1\\ b_2 & = & a_2\\ \hline \end{array}$$
$$\Longrightarrow b_2=a_2;\quad b_0=\frac{a_0+2a_1-a_2}{5};\quad b_1=\frac{3a_1-a_0+a_2}{5}$$

Luego,

$$[a_0+a_1x+a_2x^2]_\beta = \begin{pmatrix} \dfrac{a_0+2a_1-a_2}{5}\\ \dfrac{3a_1-a_0+a_2}{5}\\ a_2\end{pmatrix} \qquad (*)$$

Etapa 3. Sustituyendo en la fórmula $(*)$, tenemos que:

$$[I]_\alpha^\beta=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Análogamente para $[I]_\beta^\alpha$, tenemos el mismo proceso. (o bien recordar que esta es la inversa de $[I]_\alpha^\beta$)

Etapa 1.
Por definición la matriz $[I]_\beta^\alpha$ se construye como: $[I]_\beta^\alpha = \big([x+3]_\alpha \ [x-2]_\alpha \ [x^2+1]_\alpha\big)$

Etapa 2.
Luego, una buena estrategia es calcular en general: $[a_0 + a_1x + a_2x^2]_\alpha$. Así que

$$
\begin{aligned}
[a_0 + a_1x + a_2x^2]_\alpha = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad & \Longleftrightarrow \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 = b_0x + b_1(x^2+3) + b_2(2x^2+x) \\
& \Longleftrightarrow \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 = 3b_1 + (b_0+b_2)x + (b_1+2b_2)x^2 \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lcl|} 3b_1 & = & a_0 \\ b_0 + b_2 & = & a_1 \\ b_1 + 2b_2 & = & a_2 \\ \hline \end{array} \\
& \Longrightarrow \quad b_0 = \frac{6a_1 - 3a_2 - a_0}{6}; \quad b_1 = \frac{a_0}{3}; \quad b_2 = \frac{3a_2 - a_0}{6}
\end{aligned}
$$

luego,

$$
[a_0 + a_1x + a_2x^2]_\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{6a_1 - 3a_2 + a_0}{6} \\[2ex] \dfrac{a_0}{3} \\[2ex] \dfrac{3a_2 - a_0}{6} \end{pmatrix} \qquad (**)
$$

Etapa 3. Sustituyendo en la fórmula $(**)$, tenemos que:

$$
[I]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \\[2ex] 1 & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\[2ex] -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

(b) Determine $[1+x+x^2]_\alpha$ y $[1+x+x^2]_\beta$ Solución

Etapa 1. Determinamos $[1+x+x^2]_\alpha$ usando la fórmula $(**)$

$$
[1+x+x^2]_\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \\[2ex] \dfrac{1}{3} \\[2ex] \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

Etapa 2. Determinamos $[1+x+x^2]_\alpha$ usando la fórmula $(*)$.

$$[1+x+x^2]_\beta \;=\; \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \\ \frac{3}{5} \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

(16) Considere las bases $\alpha = \{(1,-2,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$ y $\beta = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Determine $[I]_\alpha^\beta$ e $[I]_\beta^\alpha$

Solución

$$[I]_\alpha^\beta \;=\; ([(1,-2,0)]_\beta \; [(0,1,0)]_\beta \; [(1,0,1)]_\beta) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \qquad (*)$$

Luego, debemos resolver la ecuación, $(x,y,z) = a_1(1,1,1) + a_2(0,1,1) + a_3(0,0,1)$ para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. e.e.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) &= a_1(1,1,1) + a_2(0,1,1) + a_3(0,0,1) \\
&\Updownarrow \\
(x,y,z) &= (a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3) \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{lcl} a_1 & = & x \\ a_1+a_2 & = & y \\ a_1+a_2+a_3 & = & z \end{array}\right| \Longrightarrow a_1 = x \wedge a_2 = y-x \wedge a_3 = z-y \\
&\Downarrow \\
[(x,y,z)]_\beta &= \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ z-y \end{pmatrix} \qquad (**)
\end{aligned}$$

Aplicando $(**)$ en $(*)$ tenemos que

$$[I]_\alpha^\beta \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Análogamente, para

$$[I]_\beta^\alpha \;=\; ([(1,1,1)]_\alpha \; [(0,1,1)]_\alpha \; [(0,0,1)]_\alpha) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \qquad (*)$$

Debemos resolver la ecuación, $(x,y,z)=a_1(1,-2,0)+a_2(0,1,0)+a_3(1,0,1)$ para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Es decir

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) &= a_1(1,-2,0)+a_2(0,1,0)+a_3(1,0,1)\\
&\Updownarrow\\
(x,y,z) &= (a_1+a_3,-2a_1+a_2,a_3) \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{lcl} a_1+a_3 &=& x\\ -2a_1+a_2 &=& y\\ a_3 &=& z\end{array}\right| \Longrightarrow a_1=x-z\wedge a_2=y+2x-2z\wedge a_3=z\\
&\Downarrow\\
[(x,y,z)]_\alpha &= \begin{pmatrix} x-z\\ y+2x-2z\\ z\end{pmatrix} \qquad (**)
\end{aligned}
$$

Aplicando $(**)$ en $(*)$ tenemos que

$$
[I]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \tag{22}
$$

Finalmente podemos comprobar la calidad de nuestro trabajo!!!

$$
\begin{aligned}
[I]_\alpha^\beta[I]_\beta^\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ -3 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(17) Si $P(2)=\{1,x,x^2\}$ y $\alpha=\{1+x+x^2,-2-x+x^2,-1+x+x^2\}$ dos bases de $\mathbb{R}_2[x]$ entonces determine $[I]_\alpha^{P(2)}$ e $[I]_{P(2)}^\alpha$

Solución

Etapa 1. Debemos determinar las matrices $[I]_\alpha^{P(2)}$ e $[I]_{P(2)}^\alpha$

Etapa 2. Por definición la matriz cambio de base es dada por

$$
[I]_\alpha^{P(2)} = \left([1+x+x^2]_{P(2)}\ [-2-x+x^2]_{P(2)}\ [-1+x+x^2]_{P(2)}\right)
$$

Por definición la función coordenada $[\ ]_{P(2)}$ se construye como sigue:

$$
\begin{aligned}
1+x+x^2 = 1\cdot 1+1\cdot x+1\cdot x^2 \quad&\Longleftrightarrow\quad [1+x+x^2]_{P(2)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\\
-2-x+x^2=(-1)\cdot 1+(-1)\cdot x+1\cdot x^2 \quad&\Longleftrightarrow\quad [-2-x+x^2]_{P(2)}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\\
-1+x+x^2=(-1)\cdot 1+1\cdot x+1\cdot x^2 \quad&\Longleftrightarrow\quad [-1+x+x^2]_{P(2)}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Etapa 3. Finalmente sustituyendo los datos encontrados tenemos que

$$[I]_{\alpha}^{P(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Análogamente, para$[I]_{P(2)}^{\alpha}$ tenemos que

Por definición la matriz cambio de base es dada por

$$[I]_{P(2)}^{\alpha} = \big([1]_{\alpha}\ [x]_{\alpha}\ [x^2]_{\alpha}\big)$$

Por definición la función coordenada $[\ ]_{P(2)}$ se construye como sigue:

$$\begin{aligned} 1 + 0x + 0x^2 &= a_1(1 + x + x^2) + a_2(-2 - x + x^2) + a_3(-1 + x + x^2) \\ &= (a_1 - 2a_2 - a_3) + (a_1 - a_2 + a_3)x + (a_1 + a_2 + a_3)x^2 \end{aligned}$$

Así que debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1 - 2a_2 - a_3 & = & 1 \\ a_1 - a_2 + a_3 & = & 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow a_2 = 0 \wedge a_1 = \frac{1}{2} \wedge a_3 = -\frac{1}{2}$$

Es decir

$$1 = \frac{1}{2}(1 + x + x^2) + 0(-2 - x + x^2) - \frac{1}{2}(-1 + x + x^2)$$

Para las otras coordenadas tenemos cálculos similares:

$$\begin{aligned} 0 + 1 \cdot x + 0x^2 &= a_1(1 + x + x^2) + a_2(-2 - x + x^2) + a_3(-1 + x + x^2) \\ &= (a_1 - 2a_2 - a_3) + (a_1 - a_2 + a_3)x + (a_1 + a_2 + a_3)x^2 \end{aligned}$$

Así que debemos resolver primeramente el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1 - 2a_2 - a_3 & = & 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 & = & 1 \\ a_1 + a_2 + a_3 & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow a_2 = -\frac{1}{2} \wedge a_1 = -\frac{1}{4} \wedge a_3 = \frac{3}{4}$$

Es decir

$$x = -\frac{1}{4}(1 + x + x^2) - \frac{1}{2}(-2 - x + x^2) + \frac{3}{4}(-1 + x + x^2)$$

Y en segundo lugar,

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1 - 2a_2 - a_3 & = & 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 & = & 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 & = & 1 \end{array}\right| \Longrightarrow a_2 = \frac{1}{2} \wedge a_1 = \frac{3}{4} \wedge a_3 = -\frac{1}{4}$$

Es decir

$$x^2 = \frac{3}{4}(1+x+x^2)+\frac{1}{2}(-2-x+x^2)-\frac{1}{4}(-1+x+x^2)$$

Etapa 3. Finalmente sustituyendo los datos encontrados tenemos que

$$[I]_{\alpha}^{P(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(18) Si α y $\beta = \{(1,0,1),(-1,1,0),(0,0,1)\}$ son dos bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es la matriz de cambio de la baseα para la base β entonces determine la base α.

Solución

Etapa 1. Supongamos que $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^3$ es la base pedida

Etapa 2. Com la matriz de cambio de base es $[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ entonces por construcción se debe verificar que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ([u_1]_{\beta}\ [u_2]_{\beta}\ [u_3]_{\beta})$$

Así que

$$\begin{aligned} [u_1]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\iff u_1 = 1(1,0,1)+0(-1,1,0)+1(1,1,1) = (2,1,2) \\ [u_2]_{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} &\iff u_2 = -1(1,0,1)-2(-1,1,0)+1(1,1,1) = (4,-1,0) \\ [u_3]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &\iff u_3 = 1(1,0,1)+1(-1,1,0)+1(1,1,1) = (1,2,2) \end{aligned}$$

Por tanto la base buscada es $\alpha = \{(2,1,2),(4,-1,0),(1,2,2)\}$

(19) Si $\alpha = \{(2,1,2),(4,-1,0),(1,2,2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, y $u = (1,2,3)$ entonces determine $[u]_{\alpha}$

Solución

Recordemos que por definición $[u]_\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (1,2,3) = a(2,1,2) + b(4,-1,0) + c(1,2,2)$ entonces

$$[u]_\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lcr|} 2a + 4b + c & = & 1 \\ a - b + 2c & = & 2 \\ 2a + 2c & = & 3 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow a = \frac{3}{2} \ \wedge \ b = -\frac{1}{2} \ \wedge \ c = 0$$

$$\Longrightarrow \quad [u]_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \\ -\frac{1}{2} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bibliografía

[1] Bello, I. “Álgebra Elemental ”, Brooks/Cole Publishing Company 1999.

[2] Bobadilla, G. Labarca R. “Cálculo 1 ”, Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago 2007.

[3] Boldrini, J. Rodriguez, S. Figueiredo, V. Wetzler, H. “Álgebra Linear”, Editora Harper & Row do Brasisl Ltda, 1984.

[4] Fraleigh J. “Álgebra Abstracta ”Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

[5] Grimaldi, R. “Matemáticas Discretas y Combinatorias ”, Addison Wesley 1997.

[6] Gustafson, R. “Álgebra Intermedia ”, Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[7] Kaufmann, J. “Álgebra Intermedia ”, Brooks/Cole Publishing Company 2000

[8] Santander, R. “Álgebra Elemental y superior”, Universidad de Santiago 2004

[9] Santander, R. “Álgebra Lineal”, Universidad de Santiago 2004

[10] Santander, R. “Un Segundo curso de Algebra Lineal”

[11] Swokowski, E. “Álgebra y trigonometría ”, Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[12] Zill, D. ” Álgebra y trigonometría ”, Mc Graw Hill 1999

Indice Alfabético