Contenidos

CAPITULO 0

Matrices

El trabajo solidario es lo único que hace humano al ser humano

Este Capitulo estará destinado a presentar contenidos y actividades que permitirán al estudiante, recordar los contenidos mínimos necesarios, a cerca del conjunto de matrices, ya estudiado en el curso de Álgebra I con el objetivo de enfrentar con éxito el estudio de los tópicos del curso Álgebra II. en particular su Capítulo I, Sistemas de Ecuaciones lineales y matrices.

1. El grupo de matrices

Dado un conjunto de datos, un problema siempre interesante es como ordenarlos de una forma rápida y eficiente, es claro que la rapidez y eficiencia dependen de las necesidades que plantea la situación; en esta dirección tenemos por ejemplo la forma como se ordenan los departamentos en un edificio A de n-pisos. Una forma sería la siguiente: El departamento a_{ij}, esta en el piso i y ocupa la posición j en dicho piso; de esta forma $A = (a_{ij})$ es una buena representación del edificio, esto es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Definición 1.1. *A será llamada una Matriz de n-filas y m-columnas (orden $n \times m$) sobre $\mathbb{R}$ si A es de la forma modelada en* (1)*.*

Usaremos la notación:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m) &= \{ \text{ matrices de orden } n \times m \text{ sobre } \mathbb{R}\} \\ \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n) &= \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times n) \end{aligned}$$

1.2. Algunas Matrices Especiales. Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ entonces

- ⧫ A será llamada Matriz fila si $n = 1$. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \text{ fila de largo } 5$$

- A será llamada Matriz columna si $m = 1$. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ columna de largo } 5$$

- A será llamada Matriz nula si $a_{ij} = 0 \quad (\forall i; 1 \leq i \leq n); (\forall j; 1 \leq j \leq m)$. Por ejemplo

$$(0)_{(2\times 3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ nula de orden } 2 \times 3$$

- A será llamada Matriz cuadrada si $n = m$. Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{cuadrada de orden } 3$$

- A será llamada Matriz diagonal si:

  - $n = m$
  - $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

  Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{diagonal de orden } 3$$

- A será llamada Matriz identidad si:

  - $n = m$
  - $a_{ij} = \begin{cases} 1 : & i = j \\ 0 : & i \neq j \end{cases}$

  Y se denota por I_n

  Por ejemplo

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{identidad de orden } 3$$

- A será llamada Matriz triangular superior si:

  - $n = m$
  - $a_{ij} = 0$ si $i > j$

Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \qquad \text{triangular superior de orden 3}$$

♦ A será llamada Matriz triangular inferior si:

- $n = m$
- $a_{ij} = 0$ si $i < j$

Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 11 & 8 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{triangular inferior de orden 3}$$

♦ A será llamada Matriz simétrica si:

- $n = m$
- $a_{ij} = a_{ji}$

Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 11 \end{bmatrix} \qquad \text{simétrica de orden 3}$$

♦ A será llamada Matriz antisimétrica si:

- $n = m$
- $a_{ij} = -a_{ji}$

Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \\ -7 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{antisimétrica de orden 3}$$

♦ A^t será llamada Matriz traspuesta de A si: $A^t = (a_{ji}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 11 \end{bmatrix} \text{ entonces } A^t = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 7 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

En general A simétrica si $A = A^t$ y A antisimétrica si $A = -A^t$

1.3. Adición de matrices.

♦ Sean $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ entonces definimos:

$$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad (1 \leq i \leq n); (1 \leq j \leq m)$$

♦ Sean $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ entonces definimos una operación binaria "+", como sigue:

$$\begin{array}{rcccl} + & : & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m) \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m) \quad \text{tal que } A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \\ & & (A, B) & \longmapsto & A + B \end{array} \tag{2}$$

Ejemplo 1.3.1. *Si* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & -7 \end{bmatrix}$ *entonces*

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En general,

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & (a_{13} + b_{13}) & \dots & (a_{1n} + b_{1n}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) & (a_{23} + b_{23}) & \dots & (a_{2n} + b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (a_{m1} + b_{m1}) & (a_{m2} + b_{m2}) & (a_{m3} + b_{m3}) & \dots & (a_{mn} + b_{mn}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teorema 1.4. $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m), +)$ *es un grupo abeliano*

Demostración

♦ La relación definida en (2) es una operación en el conjunto de matrices.

♦ Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m))$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m))$ y $C = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m))$ entonces usando la adición definida en (2) tenemos que

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= ((a_{ij}) + (b_{ij})) + c_{ij} \\ &= ((a_{ij} + b_{ij})) + c_{ij} \\ &= ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) \\ &= (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) \qquad (\text{ usamos la asociatividad de } \mathbb{R}) \\ &= a_{ij} + ((b_{ij}) + (c_{ij})) \\ &= A + (B + C) \end{aligned}$$

Luego, $(A+B)+C = A+(B+C)$, y la importancia de la asociatividad estriba en que la operación inicialmente definida para dos sumados se extiende naturalmente a un número finito de sumandos.

♦ $(0)_{(n\times m)}$ es el elemento neutro aditivo en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n\times m)$, porque si

Suponemos que $A=(a_{ij})\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n\times m))$ entonces

$$\begin{aligned} A+(0)_{(n\times m)} &= (a_{ij})+(0) \\ &= (a_{ij}+0) \\ &= (a_{ij}) \qquad \text{(usamos la propiedad del neutro aditivo de } \mathbb{R}) \\ &= A \end{aligned}$$

Luego, $A+(0)_{(n\times m)} = A = (0)_{(n\times m} + A \qquad (\forall A; A\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m))$

♦ Si $A=(a_{ij})\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n\times m)$ entonces $-A=(-a_{ij})$ es el inverso aditivo de A, ya que

Si $A=(a_{ij})\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n\times m)$ entonces

$$\begin{aligned} A+-A &= (a_{ij})+(-a_{ij}) \\ &= (a_{ij}-a_{ij}) \\ &= (0)_{(n\times m)} \qquad \text{(usamos la propiedead del inverso aditivo de } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

En particular, $A-B := A+(-B)$ en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n\times m)$

♦ Si $A=(a_{ij})\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n\times m)$, y $B=(b_{ij})\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n\times m)$ entonces $A+B=B+A$, pues

$$\begin{aligned} A+B &= (a_{ij})+(b_{ij}) \\ &= (a_{ij}+b_{ij}) \\ &= (b_{ij}+a_{ij}) \qquad \text{(usamos la conmutatividad de } \mathbb{R}) \\ &= (b_{ij})+(a_{ij}) \\ &= B+A \end{aligned}$$

1.5. Ejercicios Resueltos.

(1) Determine la matriz $A=(a_{ij})\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (1000)$; tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} i & : i\le j \\ 0 & : i>j \end{cases} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Además calcule la "traza,"(en símbolos tr) de la matriz A donde:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{1000} a_{ii} \tag{5}$$

Solución

(i) De la definición hecha en (3) tenemos que, por ejemplo:

$$\begin{aligned} a_{23} &= 2 \qquad \text{pues la "fila 2 es menor que la columna 3"} \\ a_{32} &= 0 \qquad \text{pues la "fila 3 es mayor que la columna 2"} \end{aligned}$$

Despues de lo anterior tenemos que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{11000} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{21000} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{31000} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{10001} & a_{10002} & a_{10003} & \dots & a_{10001000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1000 \end{pmatrix}$$

(ii) Finalmente,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{1000} a_{ii} = \sum_{i=1}^{1000} i = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500500$$

(2) En el conjunto de matrices $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, considera el siguiente subconjunto:

$$S = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\} \tag{6}$$

Donde A^t, es la matriz traspuesta de la matriz A. En símbolos.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{entonces } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Así por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in S$ y $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in S$
En general para entender al conjunto S, debemos ingresar al conjunto:

$$\begin{aligned} A \in S &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge A = A^t \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^t \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{c} a_{11} = a_{11} \\ a_{12} = a_{21} \\ a_{21} = a_{12} \\ a_{22} = a_{22} \end{array}\right| \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge a_{12} = a_{21} \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora si $A = (a_{ij}) \in S$ y $B = (b_{ij}) \in S$ entonces $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

Por otra parte,

$$(A+B)^t = (a_{ij} + b_{ij})^t = (a_{ji} + b_{ji}) = A^t + B^t = A + B$$

Conclusión $A+B\in S$

Además, $(0)=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in S$ y si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\in S$ entonces $-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12}\\ -a_{12} & -a_{22}\end{pmatrix}\in S$.

Así que $(S,+)$ es un grupo abeliano

Observen que si $A\in S$ entonces

$$A \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{\in S}+\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12}\\ a_{12} & 0\end{pmatrix}}_{\in S}+\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}}_{\in S}$$

1.6. Ejercicios Propuestos.

(1) Sea $A=(a_{ij})\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(100)$. Determine la matriz A correspondiente en cada caso:

- $a_{ij}=\begin{cases} 1 & : i\leq j\\ 0 & : \text{ en otro caso}\end{cases}$
- $a_{ij}=\begin{cases} j & : i\leq j\\ 1 & : \text{ en otro caso}\end{cases}$
- $a_{ij}=\begin{cases} i+j & : i\geq j\\ i-j & : \text{ en otro caso}\end{cases}$
- $a_{ij}=\begin{cases} i^2-j^2 & : i\leq j\\ 0 & : \text{ en otro caso}\end{cases}$

(2) Calcule $Tr(A)$ (traza de A) en el ejercicio anterior.

(3) Demuestre en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3)$ que:

- $(A^t)^t=A$
- $(A+B)^t=A^t+B^t$
- $A=A^t \Longleftrightarrow (a_{ij})=(a_{ji})$

(4) En $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3)$ determine los conjuntos

- $S_A=\{A\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3)\mid A=A^t\}$ matrices simétrica de orden 3.
- $AS_A=\{A\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3)\mid A=-A^t\}$ matrices antisimétrica de orden 3.

(5) Demuestre que:

- $A\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3)\Longrightarrow A+A^t\in S_A$

- $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3) \Longrightarrow A - A^t \in AS_A$

(6) Demuestre que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3) = S_A \oplus AS_A$. Es decir que se satisfacen simultáneamente las propiedades[1]

- $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3) = S_A + AS_A$
- $S_A \cap AS_A = \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3)}\}$

(7) Complete las siguientes sentencias:

- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $A = A^t$ entonces $x =$
- Si A es simétrica entonces $A - A^t =$
- Si A es una matriz triangular superior entonces A^t es
- Si A es una matriz diagonal entonces $A^t =$

(8) Define una nueva operación en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(2)$ como sigue:

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Consideremos el siguiente conjunto:

$$G = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}(i = 1, 2) \right\}$$

- Muestre que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$
- Demuestre que (G,+) es un grupo
- Si $G' = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Demuestre que $G = G'$

2. Anillo de Matrices

Sabemos que $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n), +)$ es un grupo abeliano así que, para hacer un anillo de las matrices debemos definir un producto asociativo y distributivo.

Definición 2.1. *Sean $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times m)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m \times s)$ y entonces definimos la operación producto de matrices como sigue:*

$$\begin{array}{cccccc} \cdot & : & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times m) & \times & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m \times s) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times s) \\ & & (A & , & B) & \longmapsto & A \cdot B = C \end{array}$$

Donde $C = (c_{ij})$, y

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \tag{8}$$

[1]En este caso se dice que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3)$ es suma directa de los conjuntos S_A y AS_A

Ejemplo 2.1.1.

(1) *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & -3 & 5 \\ -1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ *entonces* $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 69 & 1 & 49 \\ 16 & 55 & -21 & 43 \end{pmatrix}$

(2) *Supongamos que tenemos el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 & = & b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = & b_4 \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 & = & b_5 \end{array}\right| \qquad (\star)$$

entonces $(\star)$ *puede ser escrito en forma matricial como sigue:*

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 & = & b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = & b_4 \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 & = & b_5 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

(3) *Supongamos que tenemos tres tiendas, digamos A, B, C, y cada una de ellas tiene en stock dos artículos,* art_1 *y* art_2*, distribuidos como sigue, la tienda A posee 2* art_1 *y 4* art_2*; la tienda B posee 5* art_1 *y 7* art_2 *y la tienda C posee 4* art_1 *y 3* art_2 *entonces podemos distribuir según la matriz:*

$$M(art \times tiendas) = \begin{pmatrix} & & A & B & C \\ & & - & - & - \\ art_1 & | & 2 & 5 & 4 \\ art_2 & | & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot M(art \times tiendas) = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 7 \end{pmatrix}$ *representa la cantidad total de artículos por tienda.*
- $M(art \times tiendas) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \end{pmatrix}$ *representa la cantidad total de artículos del tipo uno y dos en stock*

Teorema 2.1.2. $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n), +, \cdot)$ *es un* *anillo no conmutativo* *con identidad* I_n, $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

Demostración

- ♦ En primer lugar, sabemos que $(\mathbb{M}, +)$ es un grupo abeliano
- ♦ Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times m)$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m \times s)$ y $C = (c_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(s \times t)$ entonces

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

El resultado sigue de los siguientes hechos: Como

- $B \cdot C = (d_{ij})$ donde $d_{ij} = \sum_{k=1}^{s} b_{ik}c_{kj}$, y

- $A\cdot(B\cdot C)=(e_{ij})$ donde $e_{ij}=\displaystyle\sum_{p=1}^{m}a_{ip}d_{pj}$

entonces

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{m}a_{ik}d_{kj}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}\left(\sum_{r=1}^{s}b_{kr}c_{rj}\right)=\sum_{r=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kr}\right)c_{rj}=(A\cdot B)\cdot C$$

♦ Si $A=(a_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times m)$, $B=(b_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times s)$ y $C=(c_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times s)$ entonces $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

Porque si hacemos, $A\cdot(B+C)=(a_{ij})[(b_{ij}+c_{ij}]=(d_{ij})$, con $d_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_{ik}[b_{kj}+c_{kj}]$ obtenemos que

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m}a_{ik}[b_{kj}+c_{kj}]=\sum_{k=1}^{m}[a_{ik}\cdot b_{kj}+a_{ik}\cdot c_{kj}]=\sum_{k=1}^{m}[a_{ik}\cdot b_{kj}]+\sum_{k=1}^{m}[a_{ik}\cdot c_{kj}]=A\cdot B+A\cdot C$$

Es, decir tenemos que $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$. Procediendo en forma análoga podemos verificar también que $(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$

♦ Si $A=(a_{ij})$ e $I_n=(b_{ij})$ tal que $b_{ij}=\begin{cases}1 & : \text{ si } i=j\\ 0 & : \text{ si } i\neq j\end{cases}$ entonces $AI_n=I_nA=A\quad(\forall A; A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$

Para verificar que I_n es el neutro multiplicativo debemos verificar que esta satisface la ecuación $AX=A$. De hecho

Si $A\cdot I_n=(t_{ij})$ entonces por definición $t_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{ij}b_{jj}$. Así que $(t_{ij})=A$.

Análogamente, $I_nA=(t_{ij})$ entonces por definición $t_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}=b_{ii}a_{ij}$. Así que $(t_{ij})=A$

♦ Finalmente, si $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ tenemos que

$$A\cdot B = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\0&0\end{pmatrix}$$

y

$$B\cdot A = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}$$

Así que, $A\cdot B\neq B\cdot A$.

3. Ejercicios Propuestos de Producto de Matrices

(1) Verdadero o Falso

- $(-A)^t=-(A^t)$
- $(A+B)^t=A^t+B^t$
- $A\cdot B=(0)\Longrightarrow A=(0)\vee B=(0)$

- $(k_1A)(k_2B) = (k_1k_2)AB$
- $(-A)(-B) = -(AB)$
- Se A y B son simétricas entonces $AB = BA$
- Si podemos multiplicar $A \cdot A$ entonces A es cuadrada

(2) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ entonces determine el conjunto:

$$S = \{B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid B^2 = A\}$$

(3) Demuestre que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (siempre que el producto tenga sentido)

(4) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{si } i = j \\ 2i - j & \text{si } i \neq j \end{cases}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3))$ tal que $b_{ij} = j - i + 1$. Determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \mid AX = A^t - 2B\}$$

(5) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Determine A^n, para $n \in \mathbb{N}$.

(6) Demuestre usando Inducción matemática que

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

(7) Un constructor tiene contrato para construir tres (3) estilos de casa: moderno, mediterráneo y colonial. La cantidad de material empleada en cada tipo de casa es dada por la matriz:

	Fierro	Madera	Vidrio	Pintura	Ladrillo
Moderno	5	20	16	7	17
Mediterráneo	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

- Si el va a construir 5,7 y 12 casas de los tipos moderno, mediterráneo y colonial respectivamente, ¿cuántas unidades de cada material serán empleadas?.
- Suponga ahora que los precios por unidad de fierro, madera, vidrio, pintura, ladrillo sean 15,8,5,1 y 10 unidades monetarias, respectivamente. ¿ Cuál es el precio unitario de cada tipo de casa ?.
- ¿ Cuál es le costo total del material empleado ?

(8) Consideremos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

Una red de comunicación tiene cinco locales con transmisores de potencias distintas. Estableceremos para la matriz $(\star)$ las siguientes condiciones:

(i) $a_{ij} = 1$ significa que la estación i transmite directamente a la estación j.

(ii) $a_{ij} = 0$ significa que la estación i no alcanza a la estación j. Observe que $a_{ii} = 0$ significa que una estación no transmite directamente para si misma.

- ¿ Cuál será el significado de la matriz $A^2 = A \cdot A$. Observe que si $A^2 = (c_{ij})$ entonces

$$c_{42} \quad = \quad \sum_{k=1}^{5} a_{4k}a_{k2} = 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 1$$

  Además el único valor no nulo 1 proviene del producto $a_{43} \cdot a_{32} = 1$. Esto significa que la estación 4 transmite para la estación 2 a través de una retransmisión por la estación 3, aunque no exista una transmisión directa de 4 a 2.

- Calcule A^2
- ¿ Cuál es el significado de $c_{13} = 2$?
- Discuta el significado de los términos no nulos, iguales a 1 y mayores que 1 de modo que pueda justificar la afirmación:
  "La matriz A^2 representa el número de caminos disponibles para ir de una estación a otra con una única retransmisión".
- ¿ Cuál es el significado de las matrices $A + A^2$, A^3 y $A + A^2 + A^3$
- Si A fuese simétrica ¿ qué significaría ?

4. Unidades en el anillo $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$

4.1. Introducción. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccc|} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \\ \hline \end{array}$$

Resolver el sistema significa encontrar el valor de x e y de tal forma que se satisfagan ambas ecuaciones simultáneamente.

El sistema se puede reescribir matricialmente como.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

entonces resolver el sistema significa determinar la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Equivalentemente encontraremos la matriz X si y sólo si la podemos "despejar ", es decir.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Entonces la pregunta es ¿ quién es $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}$? y ¿existe siempre? y ¿es fácil de encontrar?.

En cualquier caso, la respuesta sigue del análisis algebraico de la situación.

$$\left.\begin{array}{rcrcl} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcl} a_{11}a_{22}x & + & a_{12}a_{22}y & = & b_1a_{22} \\ a_{21}a_{12}x & + & a_{22}a_{12}y & = & b_2a_{12} \end{array}\right| \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

Y de,

$$\left.\begin{array}{rcrcl} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcl} a_{11}a_{21}x & + & a_{12}a_{21}y & = & b_1a_{21} \\ a_{21}a_{11}x & + & a_{22}a_{11}y & = & b_2a_{11} \end{array}\right| \Longrightarrow (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

Luego la respuesta es afirmativa si y sólo si $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0$. Más aún, ahora estamos en condiciones de responder el problema para este caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ \\ \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & \dfrac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Si definimos para $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ su determinante como: $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ entonces tenemos lo siguiente:

El sistema matricial $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ Tiene solución si y sólo si

(1) $\det(A) \neq 0$, y

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{\det(A)} \\ \\ \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{\det(A)} \end{pmatrix}$, y

(3) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det(A)} & \dfrac{-a_{12}}{\det(A)} \\ \\ \dfrac{-a_{21}}{\det(A)} & \dfrac{a_{11}}{\det(A)} \end{pmatrix}$

En el caso general podemos definir de la siguiente forma:

Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, para $n \geq 2$ y $A = (a_{ij})$ entonces

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik}a_{ik} \qquad \text{(Método de Laplace)} \tag{9}$$

representa el determinante de la matriz A, calculado por la fila "i''; donde:

A_{ij} = matriz obtenida de la matriz A eliminando la fila i y la columna j, y

$\Delta_{ij} = (-1)^{(i+j)}\det(A_{ij})$ para $(i = 1, 2, \ldots, n); (j = 1, 2, \ldots, n)$, representa el cofactor de la posición ij.

Ejemplo 4.1.1. *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *entonces*

- $A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$
- $A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$
- $A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Ejemplo 4.1.2. *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *entonces para la fila uno (1) tenemos:*

$$\Delta_{11} = (-1)^2(-3) \quad \wedge \quad \Delta_{12} = (-1)^3(-6) \quad \wedge \quad \Delta_{13} = (-1)^4(-3)$$

Así que para esta matriz tenemos:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \Delta_{11}a_{11} + \Delta_{12}a_{12} + \Delta_{13}a_{13} \\ &= (-3)\cdot 1 + 6\cdot 2 + (-3)\cdot 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

4.2. Propiedades del Determinante. Aunque el desarrollo de Laplace calcula un determinante, no obstante su proceso recurrente es demasiado caro en tiempo para matrices de tamaño grande, así que es necesario mejorar tal método obteniendo consecuencias útiles desde la definición:

(1) Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces $\det(A) = \det(A^t)$. Pues $\det(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik}a_{ik} = \sum_{s=1}^{n} \Delta_{sj}a_{sj}$

(2) Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ posee una fila o una columna nula entonces $\det(A) = 0$

En efecto

$\det(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik}\cdot 0 = 0$, calculando por la fila nula

(3) Si $\alpha \in \mathbb{R}$; $\alpha \neq 0$

$$\det(L_i \to \alpha L_i)(A) = \alpha\det(A)$$

En efecto

$$\det((L_i \leftrightarrow \alpha L_i)(A)) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik}\alpha a_{ik} = \alpha\sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik}a_{ik} = \alpha\det(A)$$

(4) $\det(L_i \leftrightarrow L_{i+1})(A) = -\det(A)$

En efecto

$$\begin{aligned}
\det((L_i \leftrightarrow L_{i+1})(A)) &= \sum_{k=1}^{n} \Delta_{(i+1)k} a_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(i+1+k)} \det(A_{ik}) a_{ik} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{(i+k)} \det(A_{ik}) a_{ik} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \Delta ik a_{ik} \\
&= -\det(A)
\end{aligned}$$

Así por ejemplo; $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -3$ y $\det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$

(5) Si A posee dos filas (o columnas) iguales entonces $\det(A) = 0$

En efecto

Esta propiedad es un corolario de la propiedad anterior, pues si la fila i y la fila j son iguales entonces

$$\det(A) = \det((L_i \leftrightarrow L_j)(A)) = -\det(A)$$

Así por ejemplo; $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$

Las siguientes propiedades quedarán de ejercicios:

(6) $\det(A) = \det((L_i \rightarrow L_i + \alpha L_j)(A))$

Así por ejemplo;

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \overset{(L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1)}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \overset{(L_3 \rightarrow L_3 - 7L_1)}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} = 0$$

(7) Adición en una fila:

$$\det \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right] = \det \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right] + \det \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right]$$

(8) Determinante de un producto, (esta propiedad la mostraremos más adelante)

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \tag{10}$$

5. Ejercicios Resueltos de Determinante

(1) Si $A = (a_{ij})$ es una matriz triangular entonces $\det(A) = a_{11}\cdots a_{nn}$

En efecto

Aplicamos la definición por la primera fila si es triangular inferior, o por la primera columna si es triangular superior.

(2) Calculemos usando propiedades el determinante de la matriz A si:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Solución

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \overset{\text{(definición)}}{=} a\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \overset{(L_4\longrightarrow L_4-L_2)}{=} a\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{(definición)}}{=} a\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix} \overset{\text{(definición)}}{=} a^2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a & a \end{pmatrix} \overset{\text{(definición)}}{=} 2a^3$$

(3) Demuestre que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} &\overset{(L_2\to L_2 - xL_1)}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (y-x) & (z-x) \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} \\
&\overset{(L_3\to L_3 - x^2L_1)}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (y-x) & (z-x) \\ 0 & (y^2-x^2) & (z^2-x^2) \end{pmatrix} \\
&\overset{(\text{definición})}{=} \det\begin{pmatrix} (y-x) & (z-x) \\ (y^2-x^2) & (z^2-x^2) \end{pmatrix} \\
&= (y-x)(z^2-x^2) - (z-x)(y^2-x^2) \\
&= (y-x)(z-x)(z+x-y-x) \\
&= (y-x)(z-x)(z-y) \\
&= (x-y)(y-z)(z-x)
\end{aligned}
$$

6. Ejercicios Propuestos de Determinantes

(1) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calcule explícitamente:

(a) $\det(A+B)$

(b) $\det(A) + \det(B)$

(2) Sean $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ dos matrices. Determine si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) $\det(2A) = 2\det(A)$

(b) $\det(A^2) = (\det(A))^2$

(c) $\det(A_{ij}) < \det(A)$

(3) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Determine:

(a) A_{23}

(b) $\det(A_{23})$

(c) Δ_{23}

(d) $\det(A)$

(4) Calcule para las matrices dadas:

(a) $\det\begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\det\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

(d) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\det\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$

(g) $\det\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$ (h) $\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ (i) $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

(j) $\det\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (k) $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(5) Si $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{pmatrix} = 3$ entonces calcule $\det\begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \end{pmatrix}$

(6) Demuestre que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \tan\gamma \\ -\tan\gamma & \tan\beta & 1 \\ \tan\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

(7) Si $A(n) = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$.

Demuestre que

$$\det(A(n)) = (\alpha+\beta)\det(A(n-1)) - \alpha\beta\det(A(n-2)) \qquad (n \geq 3)$$

(8) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ tal que $\det(A) = 3$. Calcule el determinante de las siguientes matrices

- $\det((L_1 \longleftrightarrow L_3)(A))$
- $\det((L_1 \longleftrightarrow L_2)(A))$
- $\det((L_2 \longrightarrow 2L_2)(A))$
- $\det\left(\begin{cases}(L_1 \longrightarrow -3L_1)\\(L_2 \longrightarrow 2L_2)\end{cases}(A)\right)$
- $\det((L_1 \longrightarrow L_1 - 3L_2)(A))$

(9) Demuestre que :

$$\det\begin{pmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & 1+x_n \end{pmatrix} = 1+\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(10) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A = -A^t$, es decir A es antisimétrica. Demuestre que

$$\det(A^t) = (-1)^n \det(A)$$

(11) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A = -A^t$. Demuestre que

$$n \text{ impar } \Longrightarrow \det(A) = 0$$

(12) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A^s = 0$ y $A^{s-1} \neq 0$, una tal matriz se llama matriz nilpotente. Demuestre que $\det(A) = 0$

(13) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A^2 = A$, una tal matriz se llama matriz idempotente. Determine $\det(A)$

7. Determinante y Matriz Inversa

Recordemos que el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Tiene solución si y sólo si, $\det(A) \neq 0$ y

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det(A)} & -\dfrac{a_{12}}{\det(A)} \\ & \\ -\dfrac{a_{21}}{\det(A)} & \dfrac{a_{11}}{\det(A)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det(A)} & \dfrac{-a_{12}}{\det(A)} \\ & \\ \dfrac{-a_{21}}{\det(A)} & \dfrac{a_{11}}{\det(A)} \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$, pues

$$A \cdot A^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det(A)} & \dfrac{-a_{12}}{\det(A)} \\ & \\ \dfrac{-a_{21}}{\det(A)} & \dfrac{a_{11}}{\det(A)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Entonces lo que corresponde ahora, es verificar si el papel que juega el determinante para determinar al conjunto $\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$, puede ser generalizado para la determinación de $\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$. Para fijar algunos nombres de uso corriente haremos la siguiente.

Definición 7.1. *Diremos que $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ es invertible o no singular o una unidad, si $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$, es decir, si existe $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, y en tal caso notamos $B = A^{-1}$.*

Para conectar esta definición con nuestro estudio de determinantes iniciamos con el siguiente.

Lema 7.1.1. $A \in U(n) \Longrightarrow \det(A) \neq 0 \wedge \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

En efecto

$$\begin{aligned} A \in U(n) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\exists A^{-1}; A^{-1} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)\right) : A \cdot A^{-1} = I_n \\ &\Longrightarrow \quad \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) \\ &\Longrightarrow \quad \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \\ &\Longrightarrow \quad \det(A) \neq 0 \quad \wedge \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^{-1} \end{aligned}$$

Definición 7.2. *Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A = (a_{ij})$ entonces*

(1) *Llamaremos matriz de cofactores a la matriz $\widetilde{A} = (\Delta_{ij})$, y*

(2) *Matriz adjunta de A a la matriz $adj(A) = \widetilde{A}^t$*

Ejemplo 7.2.1. *Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ entonces su matriz de cofactores y adjunta son respectivamente:*

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}, \; y \; adj(A) = \begin{pmatrix} -19 & -15 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{pmatrix}$$

Observamos de este ejemplo los siguientes hechos:

- $A \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -19 & -15 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{pmatrix}$

- $\det(A) = 2\Delta_{11} + 1 \cdot \Delta_{12} + 0 \cdot \Delta_{13} = 2 \cdot (-19) + 19 = -19$. *Así que*

$$A \cdot adj(A) \quad = \quad \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{pmatrix} \tag{11}$$

- *Aunque este paso no sea necesario, sin embargo es una cuestión que más tarde de todas formas abordaremos, y permite simplificar nuestro acercamiento a la obtención de las unidades del anillo de matrices. Si definimos la operación de matrices*

$$\begin{array}{cccc} \cdot & : & \mathbb{R} \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \\ & & (\lambda, (a_{ij})) & \longmapsto & (\lambda \cdot a_{ij}) \end{array}$$

Así que, aplicando esta función en (11) *obtenemos que,*

$$A \cdot adj(A) = \det(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \left(\frac{\Delta_{ij}}{\det(A)}\right)^t$$

- *El resultado anterior no es una casualidad, en realidad tenemos el siguiente:*

Teorema 7.3. $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = \det(A) I_n$

En efecto

- Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces $Adj(A) = (\Delta_{ij})^t = (\Delta_{ji})$

- $A \cdot adj(A) = (c_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, donde $c_{ij} = \displaystyle\sum_{s=1}^{n} a_{is}\Delta_{js}$, para $(1 \leq i \leq n)$ y $(1 \leq j \leq n)$

- Si $i = j$ entonces

$$c_{ii} \quad = \quad \sum_{s=1}^{n} a_{is}\Delta_{is} = \det(A) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

- Si $i \neq j$ entonces

$$\begin{aligned} c_{ij} \quad &= \quad \sum_{s=1}^{n} a_{is}\Delta_{js} \\ &= \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{fila } i \\ \\ \leftarrow \text{fila } j \\ \\ \\ \end{array} \\ &= \quad 0 \end{aligned}$$

Corolario 7.3.1. *Si* $\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid A \text{ invertible}\}$ *entonces*

$$\boxed{A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0}$$

En tal caso,

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \qquad \wedge \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, adj(A)}$$

Ejemplo 7.3.2. *Si* $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$ *entonces* $\det(A) = 6 \cdot 4 - 11 \cdot 2 = 2$, *Luego existe* A^{-1}, *y usando el teorema anterior podemos calcular la inversa:*

En efecto

- $\widetilde{A} = (\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$
- $adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{pmatrix}$

Ejemplo 7.3.3. *Sean* $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ *y* $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ *entonces*

$$A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \wedge B \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \Longrightarrow A \cdot B \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$$

En efecto

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) &\iff (\exists A^{-1}; A^{-1} \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))) : A \cdot A^{-1} = I_n \\ B \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) &\iff (\exists B^{-1}; B^{-1} \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))) : B \cdot B^{-1} = I_n \end{aligned}$$

Luego,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Así que,

$$A \cdot B \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \quad \wedge \quad (A \cdot B)^{-1} \;=\; B^{-1}A^{-1}$$

8. Ejercicios Propuestos de Matriz Inversa

(1) Determine $\det(A)$ y si es posible A^{-1} para las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) Demuestre que

$$A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \Longleftrightarrow A^t \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$$

(3) Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -\alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \beta & \alpha & -\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ entonces

(a) Determine el conjunto

$$\mathbb{I} \quad = \quad \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)\}$$

(b) Para $u \in \mathbb{I}$, (si $\mathbb{I} \neq \emptyset$), determine A^{-1}

(4) Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & -3 \\ 4 & (1-\alpha) \end{pmatrix}$. Determine el conjunto:

$$\mathbb{U}(A) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\}$$

(5) Sea $A = \begin{pmatrix} -\alpha & (\alpha-1) & \alpha+1) \\ 1 & 2 & 3 \\ (2-\alpha) & (\alpha+3) & (\alpha+7) \end{pmatrix}$. Determine el conjunto:

$$\mathbb{U}(A) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)\}$$

(6) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Demuestre que

$$A \notin \mathbb{U}(n) \Longrightarrow A \cdot adj(A) = (0)$$

(7) Demuestre que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ y determine A^{-1}

(8) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. demuestre que

$$A = A^t \quad \Longrightarrow \quad Adj(A) = (Adj(A))^t$$

(9) Si $\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid A \text{ invertible}\}$ entonces demuestre que $\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ es un grupo no abeliano con el producto de matrices.

9. Operaciones Elementales: Rango de una Matriz

Sabemos que una operación elemental es una de las funciones definidas como:

1. $\begin{array}{cccc} (l_i \leftrightarrow l_j) & : & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) \\ & & A & \longmapsto & (l_i \leftrightarrow l_j)(A) \end{array}$ Que consiste en permutar la fila i con la fila j

2. $$\begin{array}{cccccl} (l_i \to \alpha \cdot l_i) & : & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m) & \text{Que consiste en multiplicar la fila i por } \alpha \neq 0 \\ & & A & \longmapsto & (l_i \to \alpha \cdot l_i)(A) & \end{array}$$

3. $$\begin{array}{cccccl} (l_i \to l_i + \alpha \cdot l_j) & : & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m) & \text{Que consiste en permutar la fila i} \\ & & A & \longmapsto & (l_i \to l_i + \alpha l_j)(A) & \text{por la fila i más } \alpha \text{ veces la fila j} \end{array}$$

Ahora relacionaremos lo anterior con las matrices a través de la siguiente definición:

Definición 9.1. *Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m)$. diremos que $A \cong B$ por filas si B es obtenida de A por un número finito de operaciones elementales*

Ejemplo 9.1.1. *Si consideramos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 6 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 9 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces como la "composición de isomorfismos" es un isomorfismo podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 6 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 9 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_1 \longrightarrow \tfrac{1}{2}L_1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 9 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} (L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -11 & 16 & 3 \\ 9 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_2 \longrightarrow L_3 - 9L_1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -11 & 16 & 3 \\ 0 & -16 & 43 & -26 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 9.1.2. *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ tal que $a_{ij} = i \quad (1 \leq i \leq 4)(1 \leq j \leq 4)$ entonces*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (L_2 \longleftrightarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_1) \\ (L_4 \longrightarrow L_4 - 4L_1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación 9.1.3. *En los ejemplos anteriores podemos notar que:*

(1) *La operación elemental $(L_r \longleftrightarrow L_s)$, nos permite trasladar a voluntad las filas de la matriz, como por ejemplo acumular, si las hubiera, las filas nulas (de puros ceros) en las filas inferiores (de abajo) de la matriz.*

(2) *La operación elemental $(L_r \longrightarrow \alpha L_r)$, nos permite crear unos (1) en cualquier posición de la matriz.*

(3) *La operación elemental $(L_r \longrightarrow L_r + \alpha L_s)$, nos permite crear ceros (0) en cualquier posición de la matriz.*

Esta observación nos permite construir una clase especial de matriz, que de ahora en adelante será muy importante, como lo iremos viendo en el transcurso de nuestro estudio, por lo pronto la formalizaremos a través de la siguiente.

Definición 9.2. *Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m)$ entonces*

(1) *A será llamada "***Matriz Escalonada Reducida por Filas***" si:*

  (a) *En cualquier fila no nula, el primer elemento no nulo (partiendo de la izquierda) es un uno (1). A este elemento lo llamaremos el pivote de esa fila.*

  (b) *Todas las filas (si las hay) cuyos elementos son todos ceros (filas nulas), aparecen bajo las filas no nulas.*

  (c) *Si una columna contiene el pivote de un fila entonces es nula en todas las otras posiciones.*

  (d) *Si dos filas sucesivas son no nulas entonces el primer elemento no nulo en la fila inferior, esta a la derecha del primer elemento no nulo de la fila superior.*

(2) *A será llamada "***Matriz Escalonada por Filas***" si:*

  (a) *En cualquier fila no nula, el primer elemento no nulo (partiendo de la izquierda) es un uno (1). A este elemento lo llamaremos el pivote de esa fila.*

  (b) *Todas las filas (si las hay) cuyos elementos son todos ceros (filas nulas), aparecen bajo las filas no nulas.*

  (c) *Si dos filas sucesivas son no nulas entonces el primer elemento no nulo en la fila inferior, esta a la derecha del primer elemento no nulo de la fila superior.*

Ejemplo 9.2.1. *Cinco matrices en la forma escalonada reducida por filas.*

$$\text{(a)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \text{(b)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad \text{(c)}\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&0&1&2\end{pmatrix}\quad \text{(d)}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad \text{(e)}\begin{pmatrix}1&0&2&5\\0&1&3&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Ejemplo 9.2.2. *Cinco matrices en la forma escalonada por filas. Note la diferencia con (9.2.1)*

$$\text{(a)}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \text{(b)}\begin{pmatrix}1&-1&6&4\\0&1&2&8\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad \text{(c)}\begin{pmatrix}1&0&2&5\\0&0&1&2\end{pmatrix}\quad \text{(d)}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\quad \text{(e)}\begin{pmatrix}1&3&2&5\\0&1&3&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Lema 9.3. *Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ entonces existe una única $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ tal que $A \cong B$ por filas donde B es una matriz escalonada por filas.*

En efecto

El resultado sigue, de observar que el orden de una matriz es finito, es decir $(n \times m)$, es una pareja de números naturales finitos.

Definición 9.4. *Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ entonces llamaremos "rango " de la matriz A al número de filas no nulas de su correspondiente matriz escala reducida por filas.*

La notación que usaremos para el rango de una matriz A será $\rho(A)$

Ejemplo 9.4.1. *Calculemos el* $\rho(A)$ *si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Aplicando operaciones elementales orientadas, es decir guiados por la definición de matriz escala reducida por filas tenemos que.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (L_2 \longrightarrow L_2 + L_1) \\ \\ (L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(L_2 \longrightarrow \frac{1}{2}L_2\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así que $\rho(A) = 2$

9.5. Ejercicios Propuestos.

(1) Reducir a la forma escalonada por filas las matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -7 & 14 \\ 2 & 6 & 1 & -2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) Reducir a la forma escalonada reducida por filas las matrices del ejercicio (1)

(3) Calcular el rango de las matrices del ejercicio (2)

(4) Describa todas las posibles matrices de orden 2, que esten en la forma escalonada reducida por filas

(5) Demuestre que la relación definida en la **Definición 9.1**, es una relación de equivalencia

(6) Demuestre que toda matriz escalonada reducida por filas es una matriz escalonada por filas.

10. Operaciones Elementales: Matrices elementales

Definición 10.1. *Una matriz* $E \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ *se llamará matriz elemental si es obtenida de la matriz identidad* I_n*, a través de una única operación elemental.*

Ejemplo 10.1.1. $E_{(l_1 l_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *es matriz elemental pues* $E_{(l_1 l_2)} = (l_1 \leftrightarrow l_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 10.1.2. $E_{(7l_1)} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *es matriz elemental pues* $E_{(7l_1)} = (l_1 \rightarrow 7l_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 10.1.3. $E_{(l_2+l_2\cdot L_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *es matriz elemental pues* $E_{(l_2+l_2\cdot l_1)} = (l_2 \rightarrow l_2 + 2l_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Teorema 10.2. *Si* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ *entonces* $(l_i \leftrightarrow l_j)(A) = E_{(l_i l_j)} \cdot A = (l_i \leftrightarrow l_j)(I_n) \cdot A$

En efecto

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ entonces } (l_i \leftrightarrow l_j)(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Por otra parte, } E_{(l_i l_j)} = (l_i \leftrightarrow l_j) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \text{ Así que}$$

$$E_{(l_i l_j)} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

De donde sigue que, $(l_i \leftrightarrow l_j)(A) = E_{(l_i l_j)} \cdot A = (l_i \leftrightarrow l_j)(I_n) \cdot A$

Teorema 10.3. *Si* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ *entonces* $(l_i \rightarrow \alpha \cdot l_i)(A) = E_{(\alpha l_i)} \cdot A = (l_i \rightarrow \alpha \cdot l_i)(I_n) \cdot A$

En efecto

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ entonces } (l_i \rightarrow \alpha \cdot l_i)(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \alpha a_{i3} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Por otra parte, $E_{(\alpha i)} = (l_i \to \alpha \cdot l_i)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$

Así que,

$$E_{(\alpha i)} \cdot A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \alpha a_{i3} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $(l_i \to \alpha \cdot l_i)(A) = E_{(\alpha l_i)} \cdot A = (l_i \to \alpha \cdot l_i)(I_n) \cdot A$

Teorema 10.4. *Si* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ *entonces* $(l_i \to l_i + \alpha \cdot l_j)(A) = E_{(l_i + \alpha l_j)} \cdot A = (l_i \to l_i + \alpha \cdot l_j)(I_n) \cdot A$

En efecto

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \text{ entonces } (l_i \to l_i + \alpha l_j)(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j1} & \cdots & a_{in} + \alpha a_{j1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Por otra parte, $E_{(l_i + \alpha l_j)} = (l_i \to l_i + \alpha l_j)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$

Así que,

$$E_{(l_i + \alpha l_j)} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j1} & \cdots & a_{in} + \alpha a_{j1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Luego, $(l_i \leftrightarrow l_i + \alpha l_j)(A) = E_{(l_i + \alpha l_j)} \cdot A = (l_i \leftrightarrow l_i + \alpha l_j)(I_n) \cdot A$

Corolario 10.4.1. *Si* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ *entonces* $E_A = E_s \cdot E_{s-1} \cdots E_1 \cdot A$

En efecto

- *La relación ser equivalentes por filas es una relación de equivalencia. ver Ejercicios Propuestos 9.5, ejercicio (5)*

- *Por definición, para cada matriz* A *existe en su clase de equivalencia, una única matriz escala reducida por filas* E_A.

- *Luego a partir de* A, *para obtener* E_A *se necesita realizar un número finito de operaciones elementales, digamos* φ_i *con* $i = 1, 2, \dots, s$, *es decir*
$$(\varphi_s \circ \cdots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)(A) \quad = \quad E_A \tag{12}$$

- *Aplicando la definición de matriz elemental y los teoremas* (10.2), (10.3) *y* (10.4), *a cada operación* φ_i *con* $i = 1, 2, \dots, s$ *le corresponde una matriz elemental* E_i *con* $i = 1, 2, \dots, s$. *Así que*

$$\begin{aligned}
E_A &= (\varphi_s \circ \cdots \circ \varphi_2) \circ (\varphi_1(A)) \\
&= (\varphi_s \circ \cdots \circ \varphi_2) \circ (E_1 \cdot A) \\
&= (\varphi_s \circ \cdots \circ)\varphi_2(E_1 \cdot A) \\
&= (\varphi_s \circ \cdots \circ (E_2 \cdot E_1 \cdot A) \\
&= E_s \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A
\end{aligned}$$

Corolario 10.4.2. *Si* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ *entonces* $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \Longleftrightarrow E_A = I_n$

En efecto

Como $E_A = E_s \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$ *entonces en primer lugar,*

$A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \Longrightarrow \rho(A) = n \Longrightarrow E_A = I_n$. *(Definición de matriz escala reducida por filas)*

En segundo lugar,

$E_A = I_n \Longrightarrow E_s \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n \Longrightarrow \det(A) \neq 0 \Longrightarrow A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$

Corolario 10.4.3. *Si* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ *entonces* $\rho(A) = n \Longleftrightarrow A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$

En efecto

$\rho(A) = n \Longleftrightarrow E_A = I_n \Longleftrightarrow A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$

11. Matrices Elementales y Matriz Inversa

Sabemos de los corolarios (10.4.1) y (10.4.2) que para una matriz $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tenemos que

(1) $E_A = E_s \cdot E_{s-1} \cdots E_1 \cdot A$, y

(2) $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \Longleftrightarrow E_A = I_n$

Así que, juntando la información tenemos el siguiente resultado:

$$A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \Longleftrightarrow I_n = E_s \cdot E_{s-1} \cdots E_1 \cdot A \Longleftrightarrow A \cong I_n \tag{13}$$

Es decir, $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ si y sólo si la identidad es obtenida de A por s operaciones elementales.

Además es inmediato que,

$$A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \Longleftrightarrow I_n = E_s \cdot E_{s-1} \cdots E_1 \cdot A \Longleftrightarrow A^{-1} = E_s \cdot E_{s-1} \cdots E_1 \tag{14}$$

Por otra parte,

$$A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \quad \Longleftrightarrow \quad I_n = E_s \cdot E_{s-1} \cdots E_1 \cdot A \Longleftrightarrow A^{-1} = E_s \cdot E_{s-1} \cdots E_1 I_n \Longleftrightarrow I_n \cong A^{-1} \tag{15}$$

Es decir, $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ si y sólo si A^{-1} es obtenida de I_n por las mismas s operaciones elementales usadas en (13)

Así que de (13), de (14) y (15) obtenemos el "Algoritmo"

$$\begin{array}{c|c} A & I_n \\ \cong & \cong \\ I_n & A^{-1} \end{array}$$

Ejemplo 11.1. *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *entonces* $\det(A) = -2$ *y* $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$, *por tanto podemos aplicar nuestra técnica para encontrar* A^{-1}.

$$\begin{array}{c|c}
A & I_n \\
\shortparallel & \shortparallel \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \\
l_2 \to l_2 - 3l_1 & l_2 \to l_2 - 3l_1 \\
 & \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \\
l_2 \to -\frac{1}{2}l_2 & l_2 \to -\frac{1}{2}l_2 \\
 & \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 & \\
l_1 \to l_1 - 2l_2 & l_1 \to l_1 - 2l_2 \\
 & \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
\shortparallel & \shortparallel \\
I_n & A^{-1}
\end{array}$$

11.2. Ejercicios Propuestos. Determine, si es posible, A^{-1} para las siguientes matrices:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(e)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(f)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(g)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(h)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(i)} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Ejercicios Resueltos Misceláneos del Anillo de Matrices

(1) Sean $A \in \mathbb{M}_R(n)$, $B \in \mathbb{M}_R(n)$ y $C \in \mathbb{M}_R(n)$ tal que

(a) $\det(A) \neq 0$

(b) $C^tB + A)^t = (A^t + B^t)(I_n + C)$

Demuestre que $C = (-BA^{-1})^t$

Solución

Etapa 1. P.d.q. $C = (-BA^{-1})^t$

Etapa 2. Gestión de la información

(i) Como $C^tB + A)^t = (A^t + B^t)(I_n + C)$ entonces $(C^tB)^t + A^t = A^t + A^tC + B^t + B^tC$

Pues, la operación traspuesta es un homomorfismo de grupos. es decir en el espacio de matrices vale la propiedad

$$(\mathbf{R} + \mathbf{S})^{\mathbf{t}} = \mathbf{R}^{\mathbf{t}} + \mathbf{S}^{\mathbf{t}}$$

(ii) Como $(C^tB)^t + A^t = A^t + A^tC + B^t + B^tC$ entonces $B^tC + A^t = A^t + A^tC + B^t + B^tC$

Pues, la operación traspuesta en el producto de matrices satisface la propiedad

$$(\mathbf{RS})^{\mathbf{t}} = \mathbf{R}^{\mathbf{t}}\mathbf{S}^{\mathbf{t}}$$

(iii) Finalmente como $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n), +)$ es un grupo entonces

$$\mathbf{A}^{\mathbf{t}}\mathbf{C} + \mathbf{B}^{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow -\mathbf{B}^{\mathbf{t}} = \mathbf{A}^{\mathbf{t}}\mathbf{C}$$

(iv) Como $\det(A) \neq 0$ entonces A es invertible ($A \in \mathbb{U}(n)$). Además como $\det(A) = \det(A^t)$ entonces A^t es invertible, y $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Luego,

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A^t})^{-1}(-\mathbf{B^t}) = (\mathbf{A^{-1}})^{\mathbf{t}}[-(\mathbf{B^t})] = -(\mathbf{A^{-1}})^{\mathbf{t}}(\mathbf{B^t}) = -(\mathbf{BA^t})^{-1}$$

(2) Determine si la siguiente afirmación es verdadera o Falsa.

Sean $D \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ y $E \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ tal que

- $\det(D) = 3$
- $det(E) = -2$

Si $G = D^{-1} \cdot E^t \cdot D^2$ entonces $\det(G) = -12$

Solución : Falso, pues,

$$\det(G) = \det(D^{-1}E^tD^2) = \det(D^{-1})\det(\,E^t)\det(D^2) = \frac{1}{\det D}\det(E)(\det D)^2 = \det(E)\det(D) = -6$$

(3) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Demuestre que

$$A^2 = 0 \implies \big((I_n + A) \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \quad \wedge \quad (I_n + A)^{-1} = (I_n - A)\big)$$

Solución

Etapa 1. P.d.q. $(I_n + A) \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$, es decir $(I_n + A)(I_n - A) = I_n = (I_n - A)(I_n + A)$ o bien $\det(I + A) \neq 0$

Etapa 2. Gestión de la información

Usemos directamente la opción $(I + A)(I - A)$ y $A^2 = (0)$, para obtener

$$(I_n + A)(I_n - A) \;=\; I_n^2 - A + A - A^2 = I_n^2 - A^2 = I_n^2 = I_n$$

Análogamente

$$(I_n - A)(I_n + A) \;=\; I_n^2 + A - A - A^2 = I_n^2 - A^2 = I_n^2 = I_n$$

Así, que por definición , se tiene que la matriz $(I + A)$ es invertible y su inversa es la matriz $(I - A)$.

(4) Si $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ entonces determine el conjunto

$$S = \{(a, b) \in (\mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R} - \{0\}) \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

Solución:

Etapa 1. Debemos determinar condiciones sobre a y b para que $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))$. Es decir, debemos determinar condiciones sobre a y b para que $\det(A) \neq 0$.
Etapa 2. Aplicaremos operaciones elementales, para calcular el $\det(A)$

$$\begin{pmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} L_1 \longmapsto L_1 - L_4 \\ L_1 \longmapsto L_2 - L_4 \\ L_1 \longmapsto L_3 - L_4 \end{array} \quad \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & -b \\ 0 & b & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & -b \\ a & a & a & a+b \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_4 \longmapsto L_4 - \dfrac{a}{b}L_1 \\ L_4 \longmapsto L_4 - \dfrac{a}{b}L_2 \\ L_4 \longmapsto L_4 - \dfrac{a}{b}L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ a & a & a & 4a+b \end{pmatrix}$$

Así que $\det(A) = b^3(4a+b)$

Etapa 3. Finalmente

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{U}(n) \quad &\Longleftrightarrow \quad A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4) \wedge \det(A) \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4) \wedge b^3(4a+b) \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4) \wedge (4a+b) \neq 0 \quad (\text{Pues, } b \neq 0) \end{aligned}$$

Por tanto $S = \{(a,b) \in (\mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R} - \{0\}) \mid b \neq -4a\}$

Bibliografía

[1] Bello, I. "Álgebra Elemental ", Brooks/Cole Publishing Company 1999.

[2] Bobadilla, G. Labarca R. "Cálculo 1 ", Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago 2007.

[3] Boldrini, J. Rodriguez, S. Figueiredo, V. Wetzler, H. "Álgebra Linear", Editora Harper & Row do Brasisl Ltda, 1984.

[4] Fraleigh J. "Álgebra Abstracta "Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

[5] Grimaldi, R. "Matemáticas Discretas y Combinatorias ", Addison Wesley 1997.

[6] Gustafson, R. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[7] Kaufmann, J. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 2000

[8] Santander, R. "Álgebra Elemental y superior", Universidad de Santiago 2004

[9] Santander, R. "Álgebra Lineal", Universidad de Santiago 2004

[10] Santander, R. "Un Segundo curso de Algebra Lineal"

[11] Swokowski, E. "Álgebra y trigonometría ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[12] Zill, D. " Álgebra y trigonometría ", Mc Graw Hill 1999

Indice Alfabético